PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 24. 15. Dezember 1916. 17. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 16. Dezember 1916.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Hahnemann u. H. Hecht, Schallfelder und Schallantennen. S. 601.

K. Uller, Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. II. S. 610.

B. Thieme, Über die Wirkung von Kristalldetektoren. S. 615.

C. W. Lutz, Ein einfaches Saitenelektroskop. S. 619.

H. Seemann, Gleichheitsphotometer für Röntgenstrahlenhärtemesser. S. 622.

Besprechungen:

F. Auerbach, Die Physik im Kriege. 3. Aufl. S. 626.

Preisausschreiben. S. 626.

Personalien. S. 626.

Angebote. S. 626.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Schallfelder und Schallantennen.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Bezeichnungen:

s = Momentanwert des Ausschlages.
A = Maximalwert des Ausschlages.
i = Momentanwert der Geschwindigkeit.
I = Maximalwert der Geschwindigkeit.
P = Momentanwert des Druckes.
V = Maximalwert des Druckes.
V_0 u. P_0 = zusammengeh. Werte von Volumen und Druck.
V = Maximalwert der Volumenänderung.
ϱ = Dichte.
C = Kompressibilitätsfaktor.
$\varkappa$ = Verhältnis der spezifischen Wärmen.
a = Fortpflanzungsgeschwindigkeit.
n = Sekunden-Frequenz.
λ = Wellenlänge.
φ = Phasenwinkel zwischen Druck und Geschwindigkeit.
r = Entfernung von der Schallquelle.
L = Schallintensität pro Flächeneinheit.
L_R = Schallintensität für die Kugeloberfläche.
M = Mitschwingende Masse pro Flächeneinheit.
M_R = Mitschwingende Masse für die Kugeloberfläche.
δ = Dämpfungsfaktor.
$\mathfrak{d}$ = Dämpfung.
w = elektrischer Widerstand.
H = elektrische Selbstinduktion.
e = elektrische Spannung.
j = elektrischer Strom.
Φ = Geschwindigkeitspotential.
E = Elastizitätskoeffizient.

Bei dem Bau akustischer Apparate sind wir durch die Theorie zu Beziehungen geführt worden, die sehr weitgehende Analogien in der Elektrizität finden und erst durch den Vergleich mit den elektrischen Erscheinungen uns ihre praktische Bedeutung für die Akustik erkennen ließen.

Wir lehnen uns in den folgenden mathematischen Ableitungen sehr eng an die Theorie des Schalles von Rayleigh[1]) an und wollen im ersten Kapitel einige seiner streng abgeleiteten Resultate der Ausbreitung ebener Wellen elementar und leicht verständlich darstellen und durch neue Beziehungen erweitern. Alsdann soll im zweiten Kapitel die exakte Rayleighsche Theorie der Kugelwellen auf die nächste Umgebung der Schallquelle angewendet werden, wobei sich sehr weitgehende Analogien mit elektrischen Beziehungen und Erscheinungen zeigen werden. Im dritten Kapitel sollen einige praktische Folgerungen gezogen werden, die sich aus der Theorie ergeben, im vierten findet sich eine Zusammenfassung der Hauptergebnisse.

I. Die ebene akustische Welle.

Unter einer ebenen Welle versteht man eine solche Energieströmung in Richtung der Wellennormale, bei der der Querschnitt, durch den die Energie wandert, konstant bleibt, und unter Intensität dieser Welle die Energie, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Querschnitts tritt. Abgesehen von Verlusten, zum Beispiel durch Reibung, findet also keine Abnahme der Intensität mit der Entfernung statt.

Betrachtet man in dem betreffenden Medium einen Zylinder, dessen Grundflächen gleich der Flächeneinheit sind und auf dem Schallstrahl senkrecht stehen und dessen Höhe gleich der Strecke ist, die die Welle in der Zeiteinheit durchläuft, so sieht man, daß die oben definierte Intensität der Welle gleich dem konstanten Be-

1) Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsche Ausgabe von Neesen. Braunschweig 1880.

trag an Schwingungsenergie ist, die in diesem Zylinder enthalten ist, nachdem er in seiner ganzen Ausdehnung von der Wellenbewegung ergriffen ist. Dieser Energieinhalt läßt sich aber berechnen. Hierzu braucht man sich nur vorzustellen, daß dieser Zylinder teils mit kinetischer, teils mit potentieller Energie angefüllt ist und daß diese Beträge gleich groß sein müssen[1]).

Um diesen Energieinhalt zu berechnen, kann man sich den Zylinder also nur mit kinetischer oder nur mit potentieller Energie angefüllt denken[2]). Man kann mit Rayleigh (l. c. II, S. 23) sagen: „Die totale Energie der Wellen ist gleich der kinetischen Energie der ganzen von der Welle ergriffenen Luft, wenn dieselbe sich mit dem Maximum der in den Wellen auftretenden Geschwindigkeiten fortbewegt, oder gleich der potentiellen Energie derselben Luftmasse, wenn dieselbe auf die größte Dichtigkeit bei den Wellen verdichtet wird."

Bezeichnet man mit ϱ die Dichte und mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Medium und mit J die Maximalgeschwindigkeit des Teilchens, so ergibt sich die Intensität einer ebenen akustischen Welle in kinetischer Form zu

$$L = \frac{\varrho a J^2}{2},$$

da a das Volumen und ϱa die Masse des betrachteten Zylinders sind.

Will man statt der Maximalgeschwindigkeit J des Teilchens seinen Maximalausschlag A einführen, so hat man nur zu beachten, daß für jede einfachperiodische Funktion

$$J = 2\pi n A$$

ist, und findet

$$L = \frac{\varrho a}{2}(2\pi n A)^2.$$

Um den Ausdruck für die Intensität in potentieller Form zu finden, denke man sich den der Betrachtung zugrunde liegenden Zylinder mit starren Wänden umgeben und durch einen beweglichen Kolben verschlossen, der das Medium innerhalb des Zylinders so komprimieren soll, daß der Überdruck gleich der Maximaldruckamplitude P der Welle wird. Hierbei findet eine Volumenänderung des Mediums im Zylinder um V statt, so daß der Kolbenweg, da sein Querschnitt zu 1 angenommen ist, selbst gleich V wird. Die mittlere Kraft, die der Kolben auf diesem Wege zu überwinden hat, ist $\frac{P}{2}$, mithin seine Arbeit, die gleich der Intensität der Welle sein muß,

$$L = \frac{1}{2} P \cdot V$$

Es ist nun nötig V durch P zu ersetzen; hierbei ist zu unterscheiden, ob es sich um Gase oder Flüssigkeiten handelt. Wir leiten zunächst den Ausdruck für Gase ab.

Da der Schwingungsvorgang adiabatisch verläuft, gilt die Beziehung:

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\varkappa} = \frac{P}{P_0},$$

wo $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und V_0 bzw. P_0 die Normalwerte von Volumen bzw. Druck sind. Solange P klein gegen P_0 ist, kann man hierfür schreiben:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{\varkappa}\frac{P}{P_0}.$$

Ersetzt man nun noch V_0 durch das Zylindervolumen a, so findet man für die Intensität der Welle

$$L = \frac{a}{2\varkappa}\frac{P^2}{P_0}.$$

Durch Benutzung der Beziehung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen

$$a = \sqrt{\frac{P_0}{\varrho}\varkappa},$$

kann man dem Ausdruck für L die beiden Formen geben:

$$L = \frac{\varrho a^3}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \qquad (1$$

$$\text{und } L = \frac{P^2}{2\varrho a}.$$

Bei der Ableitung der Intensität in potentieller Form für Flüssigkeiten hat man die Beziehung

$$\frac{V}{V_0} = C \cdot P$$

zu benutzen, wo C den Kompressibilitätsmodul bedeutet, und findet

$$L = \frac{a \cdot C}{2} P^2.$$

1) Dies gilt streng, solange der Zylinder eine ganze Anzahl von halben Wellenlängen lang ist, und mit hinreichender Genauigkeit, wenn der Überschuß an Wellenlängen-Bruchteilen klein gegen die Anzahl der halben Wellenlängen selbst ist. Schon bei einer Frequenz $n = 100$, das heißt, wenn die Länge des Zylinders 100 Wellenlängen beträgt, kann das Verhältnis beider Energien höchstens $\frac{100\lambda + 1/4\lambda}{100\lambda} = 1{,}0025$ sein. Mit steigender Frequenz wird c. p. dies Verhältnis immer mehr gleich 1.

2) Diese Betrachtung ist von den Vorgängen in einer stehenden Welle her übernommen, wo eine dauernde örtliche Trennung von kinetischer und potentieller Energie vorhanden ist.

1) Dieser Ausdruck ist bereits von Wien, Wied. Ann. **36**, 1889 abgeleitet und zu seinen Messungen der Schallintensität benutzt worden.

Unter Benutzung der Beziehung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

$$a = \sqrt{\frac{1}{\varrho \cdot C}}$$

kann man dem Ausdruck für L die beiden Formen geben:

$$L = \frac{\varrho a^3}{2}\left(\frac{P}{\frac{1}{C}}\right)^2$$

$$\text{und } L = \frac{P^2}{2\varrho a},$$

von denen der zweite identisch mit dem für Gase abgeleiteten Werte ist.

Man kann also gültig für kompressible und inkompressible Medien die Intensität einer Welle ausdrücken durch die Maximalwerte des Ausschlags, der Geschwindigkeit und des Druckes, und zwar:

$$L = \frac{\varrho a}{2}(2\pi n A)^2$$

$$L = \frac{\varrho a}{2} I^2$$

$$L = \frac{P^2}{2\varrho a}. \qquad (1)$$

Durch Kombination der beiden Ausdrücke, die die Geschwindigkeit und den Druck enthalten, findet man für die Intensität

$$L = \frac{1}{2} I \cdot P,$$

ein Ausdruck, der sein elektrisches Analogon in der Leistung eines Wechselstroms mit den Maximalwerten I und P für Strom und Spannung bei Phasengleichheit findet.

Aus denselben beiden Ausdrücken findet man auch die Beziehung

$$P = a\varrho I$$

oder, indem man statt der Geschwindigkeit den Ausschlag setzt,

$$\frac{P}{A} = a\varrho 2\pi n.$$

Die Größe $a\varrho 2\pi n$ ist charakteristisch für die verschiedenen Medien; wir haben sie die „Schallhärte" des Mediums für die Frequenz n genannt[2]).

1) Die Dimension aller drei Ausdrücke ist die einer Leistung pro Flächeneinheit, d. h. $[MT^{-3}]$.

2) Der Wert $a\varrho$ spielt bei dem Vorgang der Reflexion und Brechung eine bestimmende Rolle. Rayleigh (l. c. II, S. 98) hat statt Schallhärte die Ausdrücke „dünner" und „dichter" aus der Optik übernommen. Da wir die Medien und Schwingungskörper bei gleichzeitig variabler Frequenz betrachten, erschien uns „Schallhärte" eine bessere Bezeichnung.

II. Die Kugelwelle.

Die Ableitung der Ausdrücke für die Intensität der Kugelwellen und des Vorganges in nächster Umgebung der Schallquelle ist elementar nicht mehr durchführbar. Wir benutzen daher soweit als notwendig die exakte von Rayleigh gegebene Theorie und wollen durch Einführung neuer, aus der Elektrizität geläufiger Begriffe das Verständnis des Vorganges in der Nähe der Schallquelle selbst erleichtern.

Wir betrachten eine kugelförmige Schallquelle, deren Oberfläche in allen Punkten konphase Bewegungen gleicher Amplitude ausführt. Eine solche Kugel ist nach Rayleigh ein Strahler nullter Ordnung[1]). Wenn diese Kugel Energie nur in den Außenraum strahlt, so ist das Geschwindigkeitspotential Φ der divergierenden Kugelwelle im Abstande r von der Schallquelle nach Rayleigh (l. c. II, S. 128)

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

worin das Rayleighsche A durch Q ersetzt ist und den Maximalwert der Volumenänderung der schwingenden Kugel bedeutet, während das Rayleighsche $\varkappa = \frac{n}{a}$ durch $\frac{2\pi n}{a}$ ersetzt ist und n jetzt die Frequenz in der Zeiteinheit ist.

Aus dem Geschwindigkeitspotential findet man den Druck und die Geschwindigkeit des Mediums an der betrachteten Stelle zu:

$$p = -\varrho\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$i = \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Führt man diese Differentiationen aus, so ergibt sich:

$$p = -\frac{\varrho n Q}{2r}\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

$$i = \frac{Q}{4\pi r}\left[-\frac{2\pi n}{a}\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r}\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right].$$

Die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit wird sehr viel übersichtlicher, wenn man setzt

$$\frac{2\pi n}{a} = K\cos\varphi$$

$$\frac{1}{r} = K\sin\varphi$$

1) Die Höhe der Ordnung (der Kugelfunktionen) wird bestimmt durch die Anzahl der Knotenlinien; ein Strahler nullter Ordnung hat keine Knotenlinie, ein solcher erster Ordnung eine und so weiter.

$$\text{oder } \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2\pi n r} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$K = +\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 + \frac{1}{r^2}} = +\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}},$$

wobei $\lambda = \frac{a}{n}$ die Wellenlänge ist.

Bezeichnen P und I wieder die Maximalwerte von Druck und Geschwindigkeit, so wird:

$$p = -P \sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

und $$i = -I \sin\left(2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) - \varphi\right),$$

wobei

$$P = \frac{\varrho n Q}{2r}$$

$$I = \frac{Q}{4\pi r}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}$$

ist. Wie man sieht, besteht zwischen Druckmaximum und Geschwindigkeitsmaximum ein Phasenunterschied, und zwar eilt der Druck der Geschwindigkeit voraus.

Um die Intensität der Welle zu finden, hat man, wenn ξ die Verschiebung des Teilchens bezeichnet, zu bilden

$$L = n\int_{t=\frac{r}{a}}^{t=\frac{r}{a}+\frac{1}{n}} p\,d\xi = n\int p\frac{d\xi}{dt}dt = n\int p\,i\,dt.$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$L = \frac{1}{2} I \cdot P \cdot \cos\varphi,$$

ein Ausdruck, der den Wert für die ebene Welle als Spezialfall für $\cos\varphi = 1$ enthält und wieder sein volles Analogon in der Leistung eines Wechselstroms mit den Maximalwerten I und P für Strom und Spannung und der Phasenverschiebung φ zwischen beiden findet.

Zur Aufstellung der akustischen Druckgleichung — der eigentlichen Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit — kommt man auf folgendem Wege[1]):

Man differenziere den Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$i = \frac{Q}{4\pi r}\left[-\frac{2\pi n}{a}\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r}\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]$$

nochmals nach t und erhält:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi r}\left[-\frac{(2\pi n)^2}{a}\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{2\pi n}{r}\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right].$$

Bildet man jetzt den Ausdruck:

$$ir + \frac{a}{(2\pi n)^2}\frac{\partial i}{\partial t} =$$

$$-\frac{Q}{4\pi r}\left(\frac{2\pi n r}{a} + \frac{a}{2\pi n r}\right)\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

so kann man auf der rechten Seite den Druck p einführen und erhält:

$$ir + \frac{a}{(2\pi n)^2}\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{p}{2\pi n\varrho}\left(\frac{2\pi n r}{a} + \frac{a}{2\pi n r}\right)$$

oder nach einiger Umformung:

$$\frac{a\varrho}{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2} i + \varrho r \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2}\frac{\partial i}{\partial t} = p.$$

In dieser Gestalt erkennt man schon die vollkommene Analogie mit der bekannten elektrischen Spannungsgleichung

$$wj + \Pi\frac{dj}{dt} = e,$$

worin e, j, w und Π Spannung, Strom, Widerstand und Selbstinduktion bedeuten.

Wir können die akustische Druckgleichung nun noch weiter vereinfachen und übersichtlicher gestalten durch Benutzung der Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

und erhalten schließlich die Form:

$$a\varrho\cos^2\varphi\, i + a\varrho\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{2\pi n}\frac{\partial i}{\partial t} = p.$$

Wie wir bereits oben sahen, ist die Intensität

$$L = n\int_0^{\frac{1}{n}} p \cdot i \cdot dt$$

$$L = n\int_0^{\frac{1}{n}} a\varrho\cos^2\varphi\, i^2 dt + n\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{a\varrho\cos\varphi\sin\varphi}{2\pi n} i\frac{\partial i}{\partial t}dt.$$

Führt man diese beiden Integrationen aus, so findet man, daß das erste Integral den Wert hat

$$\frac{a\varrho}{2}\cos^2\varphi\, I^2,$$

während das zweite verschwindet, so daß

$$L = \frac{a\varrho}{2}\cos^2\varphi\, I^2$$

1) Wir verdanken den Vorschlag zu dieser mathematischen Behandlung Herrn Runge in Göttingen.

ist. Durch Vergleich mit dem früher für L abgeleiteten Werte:

$$L = \frac{1}{2} I \cdot P \cdot \cos\varphi$$

ergibt sich die Beziehung zwischen Druckmaximum und Geschwindigkeitsmaximum zu

$$P = a\varrho \cos\varphi \, I,$$

worin die Gleichung für die ebene Welle als Spezialfall für $\cos\varphi = 1$ enthalten ist. Vergleicht man hiermit das erweiterte Ohmsche Gesetz der Elektrizität

$$i = \frac{e}{\sqrt{w^2 + (2\pi n H)^2}}$$

oder auch unter Benutzung des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung etwas anders geschrieben

$$e = \frac{iw}{\cos\varphi},$$

so erkennt man unschwer die weitgehende Übereinstimmung mit der soeben abgeleiteten akustischen Beziehung. Man könnte diese Beziehung das Ohmsche Gesetz der Akustik nennen und $a\varrho\cos^2\varphi$ den akustischen Widerstand. Aus der Druckgleichung ersieht man weiter, daß sich der Druck ähnlich wie die elektrische Spannung aus zwei Teilen zusammensetzt: einem Wattdruck $P_w = a\varrho\cos^2\varphi I$ und einem wattlosen Druck $P_l = a\varrho\cos\varphi\sin\varphi I$ und daß

$$P_w = P\cos\varphi$$
$$P_l = P\sin\varphi$$

ist. Des weiteren erkennt man aus der Gleichung, daß der wattlose Druck seine Entstehung einer mitschwingenden Masse verdankt, ähnlich wie die wattlose Spannung durch eine Selbstinduktion hervorgerufen wird. Diese mitschwingende Mediummasse ist:

$$M = \frac{a\varrho\cos\varphi\sin\varphi}{2\pi n}$$

oder auch $\qquad M = r\varrho\sin^2\varphi$

da man ja nur zu beachten hat, daß

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ ist.}$$

Aus dem Gesagten folgt also, daß eine divergente Ausbreitung des Schalles in der Akustik wie ein Widerstand mit Selbstinduktion in der Elektrizität wirkt: sie bedingt ein Nacheilen der Geschwindigkeit hinter dem Druck, gibt zu einer mitschwingenden Masse Veranlassung und bedingt ein dem Ohmschen entsprechendes akustisches Gesetz, aus dem sich Leistung, Wattdruck usw. ähnlich berechnen lassen.

Die gesamte von einer Kugel vom Radius R ausgestrahlte Leistung und die mit ihr mitschwingende Mediummasse findet man durch Multiplikation der für die Flächeneinheit geltenden Ausdrücke für L und M mit $4\pi R^2$ zu

$$L_R = 4\pi R^2 a\varrho\cos^2\varphi \frac{I^2}{2}$$

$$M_R = 4\pi R^3 \varrho \sin^2\varphi.$$

Denkt man sich die Kugel selbst masselos und von einer solchen Elastizität, daß sie der mitschwingenden Mediummasse die Abstimmung n erteilt, so kann man die Dämpfung dieses Strahlungsgebildes berechnen.

Da die Dämpfung gleich der Hälfte des Verhältnisses der pro Schwingung verbrauchten Energie zur leerschwingenden Energie ist[1]), so ist die Dämpfung unseres Strahlers

$$\mathfrak{d} = \frac{\frac{1}{2}\frac{L_R}{n}}{\frac{1}{2} M_R I^2}$$

oder nach Einsetzung der Werte

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

In dieser Gleichung finden wir abermals eine Bestätigung der oben genannten Übereinstimmung mit elektrischen Größen und Beziehungen: sie stellt — elektrisch gesprochen — die Dämpfung einer Selbstinduktion mit Widerstand dar.

Wie wir aus der elektrischen Spannungsgleichung aber ohne weiteres den Dämpfungsfaktor ablesen

$$\mathfrak{d} = \frac{w}{2H}$$

und die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{d}}{n} = \frac{w}{2nH} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi},$$

so hätten wir auch, ohne die Strahlungsenergie und die leerschwingende Energie selbst ausrechnen zu müssen, aus der akustischen Druckgleichung direkt die Dämpfung hinschreiben können

$$\mathfrak{d} = \frac{a\varrho\cos^2\varphi}{2\cdot n\frac{a\varrho\cos\varphi\sin\varphi}{2\pi n}} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}$$

Es läßt sich nun ohne weitere Rechnung vermuten, daß eine konvergente Ausbreitung des Schalles in der Akustik ihr elektrisches Ana-

[1]) Die Dämpfung ist $\mathfrak{d} = \lg\frac{A_n + 1}{A_n}$ oder, solange $A_n + 1 - A_n = \Delta A$ klein gegen A_n selbst ist, $\mathfrak{d} = \frac{\Delta A}{A}$.
Da nun die Energie proportional dem Quadrat der Ausschlagsamplitude, d. h. $\mathfrak{E} \backsim A^2$ ist, so ist $\Delta\mathfrak{E} \backsim 2A\Delta A$
oder $\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}}$.

logon in einer Kapazität findet; und dies ist in der Tat auch so. Im Geschwindigkeitspotential vertauscht sich $+a$ mit $-a$, und die akustische Druckgleichung lautet:

$$a\varrho\cos^2\varphi\, i + a\varrho\cos\varphi\sin\varphi\, 2\pi n\int i\,dt = p^1).$$

Hieraus sieht man, daß eine Konvergenz ähnlich wie eine Kapazität in der Elektrizität ein Vorauseilen der Geschwindigkeit vor dem Druck bewirkt und zur Entstehung einer elastischen Kraft Veranlassung gibt.

Berücksichtigt man, daß

$$2\pi n\int i\,dt = -\frac{1}{2\pi n}\frac{\partial i}{\partial t}$$

ist, so zeigt der Vergleich der beiden Druckgleichungen, daß eine in den mathematischen Gleichungen negativ auftretende Masse als elastische Kraft physikalisch gedeutet werden muß und umgekehrt.

Als Grenzfall der divergenten oder konvergenten Ausbreitung kann man die ebene Welle als einen Vorgang ähnlich dem des elektrischen Stromes in einem reinen (Ohmschen) Widerstand ansprechen und findet in den für die Leistung und die Druckgleichung abgeleiteten Beziehungen eine Bestätigung hierfür.

III. Anwendungen und Beispiele.

Die vorstehenden Ableitungen gestatten zahlreiche Anwendungen auf die praktische Akustik; wir wollen zwei Gebiete eingehender behandeln.

1. Die Schallhärte.

Es sei die Aufgabe gestellt, zwei Schallquellen verschiedener Frequenz nach ihrer Lautstärke, das heißt ihrer ausgestrahlten Energie zu vergleichen.

Die Meßeinrichtung bestehe aus einer Membran, deren Eigenfrequenz so hoch über der höchsten der beiden Schallquellen ist, daß man sie in dem zu untersuchenden Frequenzbereich mit konstanter Empfindlichkeit benutzen kann[2]). Im allgemeinen benutzt man hierzu dünne Metallmembranen, deren Amplituden optisch, magnet-elektrisch oder desgleichen gemessen werden.

Will man aus der Größe der Membranamplitude auf die Schallintensität im Medium schließen, so muß man sich zunächst versichern, ob man durch die Membranamplitude die Druck- oder die Bewegungsamplitude des Mediums mißt. Denn würde man mit einem Druckempfänger bei einfacher und doppelter Frequenz die gleiche Membranamplitude finden, so müßte man nach den Ergebnissen des ersten Kapitels auf gleiche Schall-Lautstärke schließen, während man im Falle eines Bewegungsempfängers bei Verdopplung der Frequenz und gleich bleibender Membranamplitude eine vierfache Lautstärke berechnen würde. Man muß also einen Anhalt dafür zu gewinnen suchen, wann ein Druck- und wann ein Bewegungsempfänger vorliegt. Es soll aber gleich jetzt bemerkt werden, daß diese beiden Grenzfälle natürlich nur mit mehr oder weniger Annäherung erreicht werden können, da sowohl reine Druck- wie reine Bewegungsempfänger keine Energie aus dem Medium aufzunehmen gestatten, sondern völlige Reflektoren sein müßten.

Am Schlusse des ersten Kapitels ergab sich für die Schallhärte des Mediums bei der Frequenz n das Verhältnis von Druckmaximum zu Bewegungsmaximum zu

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Medium}} = a\varrho\, 2\pi n\,.$$

Vergleicht man hiermit die von der Frequenz außerhalb der Abstimmung unabhängige Härte einer am Rande fest eingespannten und durch Flüssigkeitsdruck gleichmäßig belasteten Membran, so findet man[1]):

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Membran}} = \frac{5Ed^3}{R^4},$$

und zwar P in kg/cm² und A in cm, wenn E der Elastizitätskoeffizient in kg/cm², d die Dicke und R der Radius in cm ist, während 5 einen empirischen Zahlenfaktor darstellt, der von der Art der Einspannung und so weiter abhängt. Durch eine einfache Betrachtung, die am vorteilhaftesten vom Zustande gleicher Härte der Membran und des Mediums ausgeht, in welchem Falle die Membran gewissermaßen als Teil des Mediums selbst schwingt, findet man, daß schallhärtere Membranen allmählich zu Druckempfängern und schallweichere Membranen zu Bewegungsempfängern übergehen. Denn im ersteren Falle muß allmählich die Bewegung des Mediums aufhören, während der Druck keine nennenswerte Änderung erleidet, und im zweiten Falle kann an der schließlich völlig nachgiebigen Membran keine Druckschwankung mehr auftreten, und der ganze Vorgang löst sich in reine Bewegung auf.

Ein zweiter vorkommender Fall ist der, daß man eine Meßeinrichtung in einem Medium

1) Es ist für den Ausschlag $\int i\,dt$ statt ξ geschrieben, um die Übereinstimmung mit der elektrischen Gleichung deutlicher hervortreten zu lassen.

2) Der andere Weg, die Eigenfrequenz tiefer zu legen, ist nur unter den allergrößten Vorsichtsmaßregeln möglich, da man natürlich vermeiden muß, mit Obertönen zusammenzutreffen. Gegen diese selbstverständliche Forderung wird aber noch oft verstoßen.

1) Zum Beispiel: Hütte 1911, S. 620.

geeicht hat und in einem andern Medium zu Lautstärken-Messungen benutzen will. Nehmen wir als Beispiel eine Stahlmembran von 0,3 mm Dicke und 40 mm Durchmesser an, so hat diese Membran eine Härte

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Stahlmembran}} = 17 .$$

Die Schallhärten von Luft und Wasser beispielsweise für die Frequenz 500 sind

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Luft}} = 0{,}12 ,$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Wasser}} = 440 \text{ [1)]},$$

wenn P in kg/cm² und A in cm gemessen werden.

Hat man diese Membran in Luft mit einem Ton der Frequenz 500 geeicht und will sie zu Messungen von Tönen der gleichen Frequenz in Wasser benutzen, so hat man zu beachten, daß sie im ersten Fall schallhart, also ein Druckempfänger, im zweiten Fall schallweich, also ein Bewegungsempfänger ist.

Ein weiterer häufig vorkommender Fall ist der, daß in das Schallfeld Körper eingebettet sind, die so wenig wie möglich das Schallfeld beeinflussen sollen. Es soll für die folgenden Betrachtungen angenommen werden, daß diese Körper klein zur Wellenlänge sind. Die Schallwelle geht an den Körpern ohne in Betracht kommende Störungen zu erleiden vorbei, wenn die Körper nicht schallweicher sind als das Medium, das heißt, wenn sie unter dem akustischen Druck des Mediums, in dem sie sich befinden, keine größeren Bewegungsamplituden ausführen als das Medium selbst.

Wir wollen als Beispiel einen Zylinder von der Wandstärke d, dem Durchmesser D, der Höhe H und dem Elastizitätskoeffizienten E betrachten. Um den Fall elementar behandeln zu können, wollen wir annehmen — wir werden sehen, daß dies für die Praxis immer genügt —, daß d klein gegen D ist, und die Grundflächen keinen nennenswerten Beitrag an elastischer Kraft im Vergleich zur Mantelfläche liefern. Dann kommt nur die Tangentialkomponente der Spannung in Betracht, während die Radial- und Axialkomponenten vernachlässigt werden können.

Unter diesen vereinfachenden Annahmen ist für einen inneren oder äußeren Überdruck P die Umfangsänderung $\triangle U$ gegeben durch

$$\triangle U = \frac{U}{2d \cdot H} \cdot \frac{D \cdot H \cdot P}{E} ,$$

da DHP die Kraft ist, die den Umfang des Zylinders U zu vergrößern bzw. verkleinern strebt; oder wenn wir mit A die Radiusamplitude bezeichnen

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Metallzylinder}} = \frac{4Ed}{D^2} .$$

Soll dieser Zylinder, den wir uns in das Medium Wasser eingebettet denken wollen, den Schallvorgang im Wasser nicht stören, so müssen wir ihn ebenso hart oder härter machen als einen gleich großen Wasserzylinder. Das Volumen dieses Zylinders ist $\frac{\pi D^2 H}{4}$, seine Volumenänderung ausgedrückt durch die Radiusamplitude πDHA. Ist C der Kompressibilitätskoeffizient des Wassers, so gilt die Beziehung

$$P = \frac{1}{C} \frac{\pi DHA}{\frac{\pi D^2 H}{4}}$$

oder

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Wasserzylinder}} = \frac{4}{C \cdot D} .$$

Soll nun der Metallzylinder ebenso hart oder härter sein als der Wasserzylinder, so muß die Beziehung erfüllt werden:

$$\frac{4Ed}{D^2} > \frac{4}{C \cdot D}$$

oder

$$\frac{d}{D} \geq \frac{1}{E \cdot C} .$$

Für einen Eisenzylinder in Wasser ergibt sich mithin die Forderung

$$\frac{d}{D} > \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-7}}$$

$$\frac{d}{D} \geq \frac{1}{100} ,$$

das heißt, daß die Wandstärke mindestens 1 Proz. des Durchmessers sein muß.

Ähnlich werden sich Näherungswerte für alle praktisch vorkommenden Fälle mit genügender Genauigkeit berechnen lassen, und man wird sich über den Einfluß solcher Körper immer Klarheit verschaffen können. Besondere Bedeutung gewinnt die Rechnung aber dann, wenn diese Körper oder Körperteile an den schallaussendenden oder schallempfangenden Apparaten selbst liegen. Solange man in Luft als Medium arbeitet, ist wohl stets die Bedingung von selbst erfüllt; ganz anders dagegen liegen die Verhältnisse, wenn man es mit Schallvorgängen im Wasser zu tun hat, wie schon ohne weiteres die 3500 mal größere Härte vermuten läßt. Hier muß der Konstrukteur besondere Maßnahmen treffen, um der von der Theorie geforderten Bedingung zu genügen.

1) Wasser ist also etwa 3500 mal schallhärter als Luft.

2. Strahler nullter Ordnung in der angewandten Akustik.

Im zweiten Kapitel, das die Beziehungen gegeben hatte, die den Strahlungskörper nullter Ordnung mit dem Medium verbinden, hatten wir als schallenden Körper uns eine pulsierende Kugel gedacht, die durch eine aufgedrückte periodische Kraft erregt wird. Wir hatten die Ausdrücke für den Phasenwinkel zwischen Druck und Geschwindigkeit, für die mitschwingende Masse und für die Dämpfung abgeleitet.

Wir wollen jetzt einige Zahlenangaben für den Nullstrahler machen.

Die Beziehung zwischen Phasenverschiebung an der Oberfläche des strahlenden Körpers und seiner Größe, gemessen in Wellenlängen, ist durch die Gleichung gegeben

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda}{2\pi R}.$$

Da für den Arbeitsvorgang, die Berechnung des Wattdrucks usw. die Kosinus-Funktion maßgebend ist, so führen wir diese ein und finden

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{2\pi R}\right)^2}}.$$

Hieraus berechnet sich folgende Tabelle:

$\frac{R}{\lambda}$	$\cos\varphi$
$\frac{1}{16}$	0,36
$\frac{1}{8}$	0,62
$\frac{1}{4}$	0,85
$\frac{1}{2}$	0,95
1	0,99

Aus dieser Tabelle geht nicht nur hervor, daß man eine Schallquelle, die die Größe einer halben bis einer Wellenlänge hat, bereits in ihrer Nähe als ebene Wellen aussendend betrachten kann, sondern auch, daß man bei Schallquellen, die klein zur Wellenlänge sind, im Abstande einer halben bis einer Wellenlänge wie mit ebenen Wellen rechnen kann; in beiden Fällen sind Druck und Geschwindigkeit praktisch schon gleichphasig, es sind keine nennenswerten leerschwingenden Energien vorhanden.

Des weiteren folgt aus dem Gesagten, daß die gegenseitige Beeinflussung von zwei Schallquellen oder die störende Wirkung von schallweichen Körpern — Schallquellen und Störungskörper immer klein zur Wellenlänge angenommen — im Abstande von etwa einer halben Wellenlänge ab praktisch nicht mehr von Bedeutung ist. Wir haben dies alles durch Experimente wiederholt bestätigen können und beabsichtigen in einer späteren Arbeit darauf zurückzukommen.

Für die mitschwingende Mediummasse hatte sich der Wert ergeben:

$$M = 4\pi R^3 \varrho \sin^2\varphi,$$

der unter Benutzung der Phasengleichung auch geschrieben werden kann:

$$M = 4\pi R^3 \varrho \frac{1}{1+\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2},$$

Man erkennt hieraus, daß für die praktisch sehr häufigen Fälle, in denen der Strahler klein zur Wellenlänge ist, die mitschwingende Mediummasse unabhängig von der Frequenz, und zwar

$$M_{R<<\lambda} = 4\pi R^3 \varrho,$$

das heißt gleich dem dreifachen Eigenvolumen des Strahlers angefüllt mit Außenmedium, ist.

Für die Dämpfung des einfachen Nullstrahlers hatten wir den Wert gefunden

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Führen wir statt des Phasenwinkels die Größe des Strahlers ein, so wird

$$\mathfrak{d} = 2\pi^2 \frac{R}{\lambda}.$$

Hieraus berechnet sich folgende Tabelle:

$\frac{R}{\lambda}$	$\mathfrak{d}$
$\frac{1}{10}$	2
$\frac{1}{20}$	1
$\frac{1}{100}$	0,2
$\frac{1}{200}$	0,1
$\frac{1}{1000}$	0,02

Aus der Dämpfungsformel erkennt man, daß für einen gegebenen akustischen Nullstrahler die Dämpfung proportional der Frequenz ist, im Gegensatz zu den bekannten Strahlungsgebilden der drahtlosen Telegraphie für elektromagnetische Wellen, bei denen die Strahlungsdämpfung etwa mit der dritten Potenz der Frequenz sich ändert. Dies hat seinen Grund darin, daß die Strahlungsgebilde der elektromagnetischen Wellen im allgemeinen solche erster Ordnung sind; für akustische Strahlungsgebilde erster Ordnung ergibt sich ebenfalls eine Abnahme der Dämpfung in einer höheren Potenz[1].

1) Siehe Rayleigh l. c. II, S. 275.

Solche Nullstrahler können umgekehrt auch als schallaufnehmende Empfänger verwendet werden; sie stellen, um einen Ausdruck aus der drahtlosen Telegraphie zu gebrauchen, Schallantennen dar und besitzen analoge Eigenschaften.

Bisher wurde als Strahler eine pulsierende Kugel angenommen, die selbst masselos ist und durch eine periodische Kraft in Schwingungen versetzt wird. In praktischen Fällen verwendet man für einen solchen Körper nullter Ordnung nicht eine pulsierende Kugel, sondern eine vibrierende Membran, die am Rande fest eingespannt als der eine Boden eines zylindrischen Gefäßes zu denken ist, während zwischen dieser schwingenden Membran und dem schallharten zweiten Boden die erregende Kraft zum Beispiel in Form eines Wechselstrommagneten angebracht ist. Der Zylindermantel selbst ist natürlich auch genügend schallhart zu bemessen. Das Innere dieses Pulsators muß mit einem Medium erfüllt sein, das wesentlich schallweicher ist als das äußere. Im anderen Falle erhält man außer dem Masseneinfluß des äußeren Mediums noch einen elastischen Einfluß des inneren Mediums, wie aus dem zweiten Kapitel über die Betrachtungen von konvergierenden Wellen hervorgeht.

Die gesamte schwingende Masse setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der Masse der Membran samt den daran befestigten Teilen zur Erzeugung der periodisch wirkenden Kraft und der mitschwingenden Masse des Mediums, während die konstante elastische Kraft in der Membran liegt. So stellt das Ganze ein mechanisches Schwingungsgebilde dar, dessen Eigenschwingung durch diese elastische Kraft und Massen gegeben ist. Will man mit dem geringsten Aufwand an zugeführter periodischer Kraft eine möglichst große Energie ausstrahlen, so wird man die Periode der erregenden Kraft auf die Eigenperiode des Systems abstimmen. Dann erhält man den Zustand, daß die aufgedrückte, Arbeit erzeugende Druckamplitude mit der Geschwindigkeitsamplitude der von der Membran abwandernden Schallenergie gleichphasig ist. Die Amplituden der elastischen Kraft sind dann gleich der Summe der Trägheitskräfte der Eigenmasse und der mitschwingenden Mediummasse und entgegengesetzt gerichtet.

Die Dämpfung eines solchen Strahlers ist kleiner als die früher angegebene; sie läßt sich berechnen aus dem Verhältnis der eigenen Masse des Strahlers zur Mediumsmasse, die früher als allein vorhanden angenommen war.

IV. Zusammenfassung.

Die vorstehenden Ableitungen und Betrachtungen haben gezeigt, daß zwischen einem Schallfelde und elektrischen Vorgängen sehr nahe formale Beziehungen bestehen, und daß mit gutem Erfolge bekannte elektrische Begriffe und Vorstellungen auf die Akustik übertragen werden können.

Ein ebenes akustisches Feld hat sein Analogon in einem reinen Widerstande, ein konvergentes Feld in einer Kapazität mit Widerstand, ein divergentes Feld in einer Selbstinduktion mit Widerstand.

Wie die elektrische Spannung mit dem Strom in den drei Fällen gleichphasig, voraus eilend und nacheilend ist, so ist es in den drei akustischen Fällen der Druck zur Geschwindigkeit.

Wie sich in dem ersten der drei Fälle die elektrische Leistung aus dem Produkt von Spannung und Strom, in den beiden anderen Fällen durch Multiplikation mit dem Kosinus ihres Phasenwinkels berechnen läßt, so geschieht dies bei dem akustischen Problem ganz analog, indem man nur für Spannung den Druck und für Strom die Geschwindigkeit setzt.

Wie in der Elektrizität das Verhältnis von Spannung und Strom den Widerstand darstellt, so liefert das Verhältnis von Druck zu Geschwindigkeit die Schallhärte. Schallharte Körper lassen nur Druckzustände, aber keine Geschwindigkeiten zu und verhalten sich analog den elektrischen Isolatoren, schallweiche Körper zeigen das entgegengesetzte Verhalten und ähneln den guten Leitern auch insofern, als sie in ein Schallfeld gebracht zur Vernichtung des Feldes in ihrer Umgebung führen. Es ist gezeigt worden, wie man die Schallhärte verschiedener Körper und Medien berechnen kann.

Aus den Untersuchungen geht hervor, daß Schall-Sender und -Empfänger mit dem umgebenden Medium in fester Verbindung stehen, deren Grad von dem Verhältnis der Größe der Schallquelle zur Wellenlänge abhängig ist und die Dämpfung und den Massenzuwachs berechnen läßt.

Zum Schlusse sind einige Bemerkungen über den realisierbaren Nullstrahler im Gegensatze zu dem schematisierten einfachen Sender der Theorie gemacht.

Kiel, im September 1916.

(Eingegangen 25. September 1916.)

Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. II[1].

Von Karl Uller.

Die Begriffsbestimmung des Wellennormalenpaares als einer ganz bestimmten, der willkürlichen Festsetzung entzogenen, wellenkinematischen Größe ist eine Aufgabe, die bisher nicht gesehen worden ist. Bei Planwellen tritt sie nicht hervor, denn dort sind Wellenvektor und Wellennormalenpaar Konstanten, die eben als vorgegeben zu betrachten sind, und weniger einfache Wellenaufgaben hat man bisher von einem anderen Ansatz ausgehend behandelt, worüber später noch weiteres zu sagen sein wird. Wir werden erkennen, daß der genannte kinematische Begriff für die Gesetze der allgemeinen Wellenausbreitung von fundamentaler Bedeutung ist. Als erste Frucht seiner Auffindung erhalten wir die Gleichungen für die umkehrbaren Wellen in inhomogenen Körpern. Dabei kommt an den Tag, daß die früher erwähnten Arbeiten von Boussinesq[2] und Gans[3] — die einzigen, die eine direkte Integration aus den Grundgleichungen zu geben beanspruchen — noch Annahmen enthalten, die auf der naheliegenden Vorstellung fußend, daß diese Wellen in den kleinsten Teilen Planwellencharakter haben, jetzt als unzutreffend zu erkennen sind. Hingegen sind unsere Gleichungen erstmals hypothesen- und einwandfrei aus den allgemeinen Feldgleichungen gewonnen. Zudem sind sie frei von den beschränkenden Voraussetzungen, die jene Verfasser zu machen sich genötigt sahen. Sie geben die erstmals sicheren Ausgangsgleichungen für das Studium der Licht-, Schall- und Bebenbewegung in Weltkörpern.

§ 5. Das Wellennormalenpaar.

Wir schicken folgende Untersuchung voraus. Die Bedingungen, die der von der Zeit unabhängige komplexe Vektor E in einem schwingenden Vektorfeld $\mathfrak{E} = {}^1/_2 \cdot (E \cdot e^{i\nu t} + E^* \cdot e^{-i\nu^* t})$ zu erfüllen hat, erlauben stets ihm eine willkürliche Konstante als Faktor beizugeben. Wir können daher stets E auf die Form bringen

$$E = e^{\nu'' t_0} \Omega \cdot \mathfrak{l}. \tag{1}$$

Darin soll bedeuten: $\mathfrak{l}$ einen (komplexen) Einheitsvektor, der die (komplexe) Richtung von E hat, und Ω den (komplexen) Betrag von E; Richtung, Betrag und Einheitsvektor für komplexe Vektoren sind symbolisch zu verstehen, in Erweiterung der bei reellen Vektoren geltenden Begriffe. Mit (1) wird nun

$$E \cdot e^{i\nu t} = E\, e^{i\nu t_0} \cdot e^{i\nu(t-t_0)} = \Omega (e^{\nu'' t_0} e^{i\nu t_0} \mathfrak{l}) e^{i\nu(t-t_0)} = E_1 e^{i\nu t_1},$$

wenn t_1 die Zeit von dem neuen N.-P. t_0 aus mißt. Da E_1 von der Form $e^{\nu'' t_0} \Omega_1 \mathfrak{l}_1$ sein muß, wo

$$\mathfrak{l}_1 = e^{\nu'' t_0} e^{i\nu t_0} \mathfrak{l} = e^{i\nu' t_0} \mathfrak{l} \tag{2}$$

der neue Einheitsvektor ist, so folgt

$$\Omega_1 = e^{-\nu'' t_0} \Omega. \tag{3}$$

In demselben Feld ($\mathfrak{E}$) sind also E_1, Ω_1 und $\mathfrak{l}_1$ verschieden von E, Ω und $\mathfrak{l}$, wenn die N.-P.e der Zeitzählung verschieden sind. Wenn Ω und $\mathfrak{l}$ als gegeben betrachtet werden, sind Ω_1 und $\mathfrak{l}_1$ nach (2) und (3) für den neuen N.-P. angebbar. Oder auch umgekehrt. Wir kennen demnach jetzt von dem komplexen Vektor E die Abhängigkeit sowohl seiner Richtung als auch seines Betrages von einem anderen N.-P. der Zeitzählung.

Entsprechend können wir in dem Ansatz für eine Welle ($E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi}$) (4) den Vektor $\mathfrak{e}$ in der Form schreiben

$$\mathfrak{e} = e^{\nu'' t_0} \omega \cdot \mathfrak{l}, \tag{5}$$

so daß

$$\Omega = \omega \cdot e^{i\Phi} \tag{6}$$

wird. In Hinblick auf (3) besteht daher die Alternative: entweder $\omega_1 = \omega$ und $\Phi_1 = \Phi + \nu'' t_0$, oder $\Phi_1 = \Phi$ und $\omega_1 = e^{-\nu'' t_0} \omega$. In einer gegebenen Welle ist E bei gewähltem N.-P. gegeben; das gleiche gilt also auch für Ω und $\mathfrak{l}$. Gemäß den Ansätzen (4) und (5) für eine Welle ist somit nach (6) einer der Skalare ω und Φ willkürlich und der andere von diesem abhängig; denn wir können ja schreiben: $\omega \cdot e^{i\Phi} = \chi \cdot e^{i\Psi}$ usw. Der Begriff des Wellennormalenpaares bestimmt sich nun aus der Notwendigkeit, diese Willkürlichkeit zu beseitigen. Denn sonst bliebe der Ausdruck (4) nur ein mathematischer Ansatz. Aber zu beachten ist, daß durch eine bloße Festsetzung über diese Willkürlichkeit nicht verfügt werden kann, vielmehr muß ein Wellenprinzip entscheiden. Es liegt aber keine andere stichhaltige Bestimmungsmöglichkeit vor als die gegenseitige Unabhängigkeitserklärung. Daraus fließt der Satz:

a) Soll der Ansatz $E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi}$ eine Welle darstellen, also nicht eine willkürliche Zerlegung des Betrages des Vektors E bieten, so muß Φ vom Betrag ω des Vektors $\mathfrak{e}$ unabhängig sein.

Die Bedingungen, welche die Welle zu erfüllen hat und an denen der Satz (a) seine Herrschaft ausübt, sind nicht solche zwischen $\mathfrak{e}$ und Φ, sondern allemal zwischen $\mathfrak{e}$ und $-\operatorname{grad}\Phi = w$.

1) I: diese Zeitschr. **17**, 168, 1916.
2) J. Boussinesq, C. R. **129**, 794, 859, 1899.
3) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**, 709, 1915.

Dabei ist nach obiger Auseinandersetzung in jeder Alternative $\mathfrak{w}$ vom N.-P. unabhängig. Dem Satz (a) gemäß muß somit gelten:

b) In einer Welle muß der Vektor $\mathfrak{w}$ unabhängig sein vom Betrage des Vektors $\mathfrak{e}$.

Dann sind $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{e}$ kinematische Größen, die wir das Wellennormalenpaar bzw. den Wellenvektor der Welle nennen; letzterer hängt vom N.-P. der Zeitmessung ab. Die Bedingungen ändern sich natürlich nicht in der Form, wenn man einen anderen N.-P. einführt, was durch Multiplikation mit der Konstanten $e^{\nu t_0}$ erreicht wird. Diese muß zum Wellenvektor geschlagen werden.

Wie stellt sich nun aber zu dem Satze (b) die im § 3 aufgestellte Forderung der Umkehrbarkeit jeder Welle? Daß lamellare Wellen sich ihr nicht fügen, ist bereits[1]) gezeigt worden. Jetzt wollen wir zeigen — ebenfalls wie dort, getreu dem Leitgedanken unseres Themas, auf rein wellenkinematischem Wege — daß auch solenoidale Wellen sich ihr nicht fügen. Aus den im § 4 entwickelten Gl. (16) und (17) für elektromagnetische Wellen ist erlaubt zu folgern

$$\operatorname{grad} \mathfrak{w}_m{}^2/a = \lambda\, \mathfrak{w}_m. \tag{7}$$

Wenn die Größe λ von Null verschieden angenommen wird, muß man zu ihrer Bestimmung auf die Gl. (15″) daselbst und auf ihre Ableitungen zurückgreifen. Man findet, daß λ sich der Feststellung entzieht. Wir wenden uns deshalb der allgemeinsten Lösungsform der Forderungen (16′) und (17′) zu, die lautet: $\mathfrak{m} = \sigma\,[\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad} \mathfrak{w}_m{}^2/a]$, wobei die allgemeinste Möglichkeit ins Auge gefaßt ist, daß $\operatorname{grad} \mathfrak{w}_m{}^2/a$ existiert und nicht gerade mit $\mathfrak{w}_m$ zusammenfällt. Aus $\operatorname{div} \mathfrak{m} = (\mathfrak{m} \operatorname{grad} \log \sigma)$ folgt wegen (16′) und (16″) des § 4 das Verschwinden von $(\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log \sigma\, a_m)$ und somit in Hinblick auf (17) ebenda $\sigma\, a_m = c \cdot \mathfrak{w}_m{}^2/a$, worin die Konstante c nicht Null zu sein braucht. Darnach wäre im allgemeinen der Wellenvektor $\mathfrak{m}$ durch das Feld des Wellennormalenpaares $\mathfrak{w}_m$ vollständig bestimmt, während in dem Unterfall von Planwellen $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{w}_m$ bloß durch die skalare Beziehung $(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) = 0$ verbunden ist. Diese ohne weiteres abzulehnende Absurdität zu vermeiden ist nur möglich, wenn Gl. (7) gilt mit dem besonderen Werte: $\lambda = 0$, also $\mathfrak{w}_m{}^2 = c \cdot a$; die Konstante c muß in Hinblick auf den besonderen Fall der Planwellen den Wert 1 haben. Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir hinsichtlich des Quadrates des elektrischen Wellennormalenpaares, wenn wir von der elektrischen Wellengleichung ausgehen. Aus der Lösung

$$\mathfrak{w}_m{}^2 = a = \mathfrak{w}_e{}^2 \tag{8}$$

folgt aber für homogene Körper

$$\operatorname{grad} \mathfrak{w}^2 = 2\,(\mathfrak{w} F)\,\mathfrak{w} = 0,$$

was ganz unmöglich allgemeine Gültigkeit haben kann. Für Scherungswellen in festen oder flüssigen Körpern kommt man auf entsprechendem Wege zu demselben Ergebnis. Somit ist aus dem Bau der Wellen selbst der Beweis erbracht, daß allgemein Wellen nicht umkehrbar sind. Die Forderung der Umkehrbarkeit fließt also nicht aus einem Wellenprinzip, wie im § 3 noch unter dem Einfluß der allgemeinen Lösung für die Wellenbewegung in Röhren vermutet und fehlerhaft begründet wurde; sie kann deshalb nicht erhoben werden.

Die Umkehrbarkeit ist indessen oft so nahe verwirklicht, daß der Begriff der ideal umkehrbaren Welle als Grenzfall und wegen seines einfachen Baues wohl theoretische und mathematische Bedeutung hat. Es gibt nämlich häufig Wellen, bei denen die streng genommen immer vorhandene Nichtumkehrbarkeit bedeutungslos gering ist und infolgedessen theoretisch und mathematisch ganz zu verleugnen ist, während diejenigen Wellen, bei denen die Nichtumkehrbarkeit stark hervortritt, die Beugungswellen im besonderen Wortsinne sind. Tritt eine Welle durch eine Öffnung, so kann ihre seitliche Ausbreitung so gering sein, daß man von ihr absehen und von einer seitlich begrenzten Welle reden darf. In Wirklichkeit geht auf der Mantelfläche des Strahles Beugung vor sich, verbunden mit starkem Intensitätsabfall; diese nach außen auslaufenden Wellenteile sind nicht umkehrbar. Indessen tritt diese Oberflächenbeugung ganz zurück gegen die mehr oder weniger vollkommene Umkehrbarkeit im Mark des Strahles. Im anderen Grenzfall — bei sehr großer Wellenlänge — ist aber die Verbreiterung der Welle die größtmögliche; diese Erscheinung der diffusen Wellenausbreitung steht ganz unter dem Zeichen der Beugung und ist nicht umkehrbar. Nichtumkehrbarkeit und Beugung entsprechen einander.

Der Satz (b) hingegen spricht ein Wellenprinzip aus. Er beansprucht allgemeine Gültigkeit, während die Festsetzung der Unabhängigkeit aller Gleichungen vom Vorzeichen des Wellennormalenpaares lediglich die praktisch umkehrbaren, also wesentlich beugungslosen Wellen von den mehr oder weniger stark ausgeprägten Beugungswellen absondert.

Übrigens ist noch zu bemerken, daß Umkehrung des Wellennormalenpaares keineswegs

1) K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen; diese Zeitschr. 17, 302, 1916.

auch Umkehrung der Strahlung gewährleistet; in Strenge ist das bestenfalls nur auf gewissen Gebieten zu erreichen, indem dort noch andere ins einzelne gehende Bedingungen erfüllt sind.

Als erste Anwendung des genannten Wellenprinzips wählen wir die Verdünnungswellen in gewöhnlichen isotropen Körpern. Diese Wellen haben der Lamellaritätsbedingung $[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = i\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}$ zu genügen[1]). Die zunächst willkürlichen Größen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}$ sind nur dann das Wellennormalenpaar bzw. der Wellenvektor, wenn $\mathfrak{w}$ unabhängig ist vom Betrage von $\mathfrak{v}$. Infolgedessen muß sein

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = 0 = \mathrm{rot}\;\mathfrak{v}, \text{ also } \mathfrak{v} = \sigma\cdot\mathfrak{w}, \qquad (9)$$

worin σ eine Konstante bezeichnet. Dies Ergebnis hatten wir schon am obengenannten Ort das Glück auf ganz anderem Wege zu finden. Die zweite Gleichung, die zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ besteht, die Wellengleichung, geht damit über in eine Gleichung, die neben den Körperparametern und ihren Gefällen nur noch das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ mit seinen Ableitungen enthält; sie zerfällt nicht.

Bei elektromagnetischen Wellen in gewöhnlichen isotropen Körpern haben wir nach § 4 C, wenn wir die magnetische Welle $(\mathfrak{m}\cdot e^{i\Phi_m})$ bevorzugen, die Solenoidalitätsbedingung der magnetischen Erregung

$$a_m(\mathfrak{m},\mathfrak{w}_m) = -\,i\,\mathrm{div}\,a_m\mathfrak{m} \qquad (10)$$

neben der Wellengleichung

$$\begin{aligned}&\{a-\mathfrak{w}_m^2-i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_m+i\,(\mathfrak{w}_m,\,\mathrm{grad}\log a_e)\}\,\mathfrak{m}\\ &+i\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m)-i\,2\,(\mathfrak{w}_m F)\,\mathfrak{m}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}\\ &-[\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\,\mathrm{grad}\log a_e]\\ &-i\,(\mathfrak{m},\,\mathrm{grad}\log a)\,\mathfrak{w}_m = 0.\end{aligned} \qquad (11)$$

Unser Wellenprinzip (b) verlangt: Welcher Wert dem Betrage von $\mathfrak{m}$ auch beigelegt werde, $\mathfrak{w}$ soll unberührt davon bleiben. Infolgedessen muß in der Nebenbedingung (10) sein

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m) = 0, \qquad (12')$$

also auch

$$\mathrm{div}\,a_m\mathfrak{m} = 0, \qquad (12'')$$

und in der Wellengleichung (11)

$$a-\mathfrak{w}_m^2-i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_m+i\,(\mathfrak{w}_m,\,\mathrm{grad}\log a_e) = 0, \qquad (13')$$

was weiter

$$\begin{aligned}&i\,2\,(\mathfrak{w}_m F)\,\mathfrak{m}+\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}+[\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\,\mathrm{grad}\log a_e]\\ &+i\,(\mathfrak{m},\,\mathrm{grad}\log a)\,\mathfrak{w}_m = 0\end{aligned} \qquad (13'')$$

nach sich zieht.

Die Skalarbedingung (10) und die Vektorbedingung (11) zerfallen also notwendig, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}_m$ die obengenannten kinematischen Größen sind und zwar in drei skalare und in eine vektorielle Gleichung. Letztgenannte hat auch als Restgleichung dem Satze (b) zu genügen, also gewisse beschränkende Bedingungen zu erfüllen. Das gilt natürlich auch für alle aus jenen abgeleitete Beziehungen. So folgt beispielsweise aus (12′)

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m) = 0 = (\mathfrak{w}_m F)\,\mathfrak{m}+(\mathfrak{m}F)\,\mathfrak{w}_m\\ +[\mathfrak{w}_m\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}];\end{aligned} \qquad (14)$$

mithin

$$2\,(\mathfrak{w}_m(\mathfrak{w}_m F)\,\mathfrak{m}) = -\,(\mathfrak{m},\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{w}_m^2), \qquad (15)$$

worin in der Tat der Betrag von $\mathfrak{m}$ keine Rolle spielt.

Ganz entsprechend gebaute Ausdrücke liefert das Wellenprinzip (b) in der elektrischen Welle $(\mathfrak{e}\cdot e^{i\Phi_e})$, in denen $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}_m$ mit $\mathfrak{w}_e$ sowie a_e mit a_m und umgekehrt vertauscht erscheinen. Man sieht, daß das elektrische und das magnetische Wellennormalenpaar verschieden sind.

Fragen wir, wann sie gleich sind. Wir gehen dazu aus von der Gl. (19) im § 4, nämlich

$$a_e E = \{[\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m]-i\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}\}\cdot e^{i\Phi_m} = a_e\,\mathfrak{e}\cdot e^{i\Phi_e} \qquad (16)$$

Daraus entwickeln wir unter Benutzung der magnetischen Wellengl. (11)

$$\begin{aligned}a_e\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{e} = e^{i(\Phi_m-\Phi_e)}\{&[\mathfrak{w}_m\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}]\\ &-i\,(a-\mathfrak{w}_m^2)\,\mathfrak{m}-i\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m)\,\mathfrak{w}_m\\ &-i\,[\mathfrak{w}_m-\mathfrak{w}_e,\;[\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m]-i\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}]\}.\end{aligned} \qquad (17)$$

Die Bedingungen für $\mathfrak{w}_m = \mathfrak{w}_e$ lauten also

$$\mathfrak{w}_m^2 = \mathfrak{w}_e^2 = a; \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{m} = 0; \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{e} = 0. \qquad (18)$$

Sie können nur auf engen Gebieten oder in ganz besonderen Fällen erfüllt sein. Dann ist

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (19)$$

und der Phasenunterschied der elektrischen und magnetischen Schwingung

$$\varphi_e-\varphi_m = i/2\cdot\log\{a_e/a_e^*\cdot a_m^*/a_m\} \qquad (20)$$

nur von den Körperparametern abhängig.

Für eine elastische Scherungswelle $(\mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi})$ in gewöhnlichen isotropen Mitteln haben wir nach § 4 B die Solenoidalitätsbedingung der Verrückung

$$(\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}) = -\,i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{f} \qquad (21)$$

neben der Wellengleichung

$$\begin{aligned}&\{a-\mathfrak{w}^2-i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}-i\,(\mathfrak{w},\,\mathrm{grad}\log\varepsilon_g)\}\,\mathfrak{f}\\ &+i\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{f}\,\mathfrak{w})-i\,2\,(\mathfrak{w}F)\,\mathfrak{f}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}\\ &-[\mathrm{rot}\,\mathfrak{f},\,\mathrm{grad}\log\varepsilon_g]-i\,(\mathfrak{f},\,\mathrm{grad}\log\varepsilon_g)\,\mathfrak{w}\\ &+2\,(\mathrm{grad}\log\varepsilon_g F)\,\mathfrak{f} = 0\end{aligned} \qquad (22)$$

mit $a = \nu^2 D/\varepsilon_g$. Nebenher sei bemerkt: In inhomogenen Körpern unterscheiden sich Scherungswellen im Bau von elektromagnetischen Wellen.

Das Wellenprinzip (b) verlangt in der Nebenbedingung (21)

$$(\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}) = 0, \qquad (23')$$

also auch

1) K. Uller, Wellen in Flüssigkeiten und Gasen; diese Zeitschr. **17**, 302, 1916; Gl.-system (1).

$$\operatorname{div} \mathfrak{f} = 0 \qquad (23'')$$

und in der Wellengleichung (22)

$$\Delta - \mathfrak{w}^2 - i \operatorname{div} \mathfrak{w} - i (\mathfrak{w}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g) = 0, \quad (24')$$

und somit auch

$$i 2 (\mathfrak{w} \Gamma) \mathfrak{f} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{f} + [\operatorname{rot} \mathfrak{f}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g] \quad (24'')$$
$$+ i (\mathfrak{f}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g) \mathfrak{w} - 2 (\operatorname{grad} \log \varepsilon_g \Gamma) \mathfrak{f} = 0.$$

Formal die gleichen Beziehungen treten im Bau von Flüssigkeitsscherungswellen auf, wie am vorhin genannten Ort gezeigt ist.

§ 6. Die umkehrbare Welle.

Diesen idealen Grenzfall erhalten wir aus dem allgemeinen Wellenbau durch die nun hinzutretende Festsetzung, daß alle Ausdrücke für jenen unabhängig seien vom Vorzeichen des Wellennormalenpaares.

Für die umkehrbare elektromagnetische Welle gewinnen wir somit aus den Gl. (12) und (13) des vorigen Paragraphen folgendes Gleichungssystem

$$(\mathfrak{m}\, \mathfrak{w}_m) = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} a_m \mathfrak{m} = 0 = \operatorname{div} \mathfrak{m} + (\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log a_m) \qquad (2)$$

$$\mathfrak{w}_m^2 = a \qquad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{w}_m = (\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad} \log a_e) \qquad (4)$$

$$2 (\mathfrak{w}_m \Gamma) \mathfrak{m} = - (\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log a) \mathfrak{w}_m \qquad (5)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{m} = [\operatorname{grad} \log a_e, \operatorname{rot} \mathfrak{m}]. \qquad (6)$$

Als ein Zeichen für die innere Widerspruchslosigkeit des Systems sei angeführt, daß der aus (5) und (3) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{w}_m$ gewonnene Ausdruck übereinstimmt mit demjenigen unter (15) im § 5, der auf ganz anderem Wege hergeleitet ist.

Wegen (1) folgt aus (5)

$$(\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad} \mathfrak{m}^2) = 0. \qquad (7)$$

Für $[\mathfrak{w}_m \mathfrak{w}_m^*] = 0$ erhalten wir demnach

$$(\mathfrak{w}_m \pm \mathfrak{w}_m^*, \operatorname{grad} \log \mathfrak{m}^2\, \mathfrak{m}^{*2}) = 0$$

oder, in Hinblick auf Gl. (5) im § 2,

$$(\mathfrak{w}_m \pm \mathfrak{w}_m^*, \operatorname{grad} \log \varepsilon_m (\mathfrak{m}\, \mathfrak{m}^*)) = 0. \qquad (8)$$

Soweit also der Spreizvektor des Wellennormalenpaares als verschwindend klein, die magnetische Welle also als einfach gelten kann, ist $\varepsilon_m (\mathfrak{m}\, \mathfrak{m}^*)$, das Produkt aus Elliptizität und dem Quadrate der Intensität des Wellenvektors, längs dem Strahle konstant.

Nimmt die Intensität ab, so muß demnach die Elliptizität zunehmen, und umgekehrt.

Aus (5) folgt noch durch skalare Multiplikation mit $\operatorname{grad} \log a_e$ und Berücksichtigung von (4), (6) sowie (14) § 5

$$(\mathfrak{w}_m (\operatorname{grad} \log a_e \Gamma) \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m} (\operatorname{grad} \log a_e \Gamma) \mathfrak{w}_m) \qquad (9)$$
$$= - {}^1/_2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{w}_m (\mathfrak{m} \operatorname{grad} \log a) - (\mathfrak{w}_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{m}).$$

Für die begleitende elektrische Welle $(\mathfrak{e} \cdot e^{i \Phi_e})$ ergeben sich formal die gleichen Ausdrücke. Deshalb muß sein

$$\mathfrak{w}_m^2 = \mathfrak{w}_e^2 = a. \qquad (10)$$

Man könnte vermuten, daß (6) und der entsprechende Ausdruck für die elektrische Welle die Lösung hätten: $\operatorname{rot} \mathfrak{m} = 0$; $\operatorname{rot} \mathfrak{e} = 0$. Das ist aber unmöglich. Denn dann müßte wegen (10) sowie § 5, 18 sein: $\mathfrak{w}_m = \mathfrak{w}_e$. Dem widersprechen jedoch (4) und der entsprechende Ausdruck in der elektrischen Welle. Nur in Gebieten, wo die Körperparameter kein Gefälle haben, sind das elektrische und das magnetische Wellennormalenpaar gleich. Wegen der erwähnten Unmöglichkeit ist die Strahlung in Strenge nicht überall umkehrbar.

Für die umkehrbare Scherungswelle stellt sich aus den Gl. (23) und (24) des vorigen Paragraphen das folgende System ein

$$(\mathfrak{f}\, \mathfrak{w}) = 0 \qquad (11)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{f} = 0 \qquad (12)$$

$$\mathfrak{w}^2 = a \qquad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = - (\mathfrak{w}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g) \qquad (14)$$

$$2 (\mathfrak{w} \Gamma) \mathfrak{f} = - (\mathfrak{f}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g) \mathfrak{w} \qquad (15)$$

$$[\operatorname{grad} \log \varepsilon_g, \operatorname{rot} \mathfrak{f}] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{f} - 2 (\operatorname{grad} \log \varepsilon_g \Gamma) \mathfrak{f}. \qquad (16)$$

Umkehrbare Strahlung ist auch hier in Strenge nicht zu verwirklichen.

Das Gleichungssystem für die umkehrbare Verdünnungswelle habe ich schon an dem zuletzt angezogenen Ort entwickelt. Multiplizieren wir (12) und (12'') daselbst skalar mit $\mathfrak{w}$, so kommt mit Rücksicht auf (9) § 5

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} + (\mathfrak{w}, \operatorname{grad} \log \{\Gamma \overline{D} + i \nu (2 \mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\} \mathfrak{w}^2)$$
$$= \frac{\overline{\Gamma} \overline{D}}{\Gamma \overline{D} + i \nu (2 \mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)} (\mathfrak{w}, \operatorname{grad} \log \overline{\Gamma} / \overline{D}); \qquad (17)$$

$$\{\nu^2 \overline{D} - \{\overline{\Gamma} \overline{D} + i \nu (2 \mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\} \mathfrak{w}^2\} \mathfrak{w}^2$$
$$+ \{\overline{\Gamma} \overline{D} + i \nu (2 \mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\} (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{w})$$
$$+ \overline{\Gamma} (\mathfrak{w}, \operatorname{grad} (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \overline{D})) \qquad (18)$$
$$+ \operatorname{div} \mathfrak{w} \{\overline{\Gamma} (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \overline{D}) + i \nu (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \mathfrak{f}_v)\}$$
$$+ i \nu (\operatorname{grad} \mathfrak{f}_g, \operatorname{grad} \mathfrak{w}^2) = 0,$$

worin $\operatorname{div} \mathfrak{w}$ aus (17) hineinzutragen ist.

Sind die logarithmischen Gefälle der Körperparameter schwach, dann ist merklich

$$\mathfrak{w}^2 = \nu^2 \overline{D} / \{\overline{\Gamma} \overline{D} + i \nu (2 \mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\} = a \qquad (18')$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = - (\mathfrak{w}, \operatorname{grad} \log \overline{D} + a \Gamma \nu^2 (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \log \overline{\Gamma} \overline{D}). \qquad (17')$$

Insbesondere für elastische Verdünnungswellen ist zu setzen:

$$\Gamma = 0; \; i \nu \bar{\mathfrak{f}}_v = \varepsilon_v - {}^2/_3 \varepsilon_g; \; i \nu \bar{\mathfrak{f}}_g = \varepsilon_g.$$

Bemerkenswert ist, daß in allen unseren Systemen die Flächen konstanter Körperparameter keineswegs zusammenzufallen brauchen. Für homo-

gene Körper gehen die Systeme in die für Planwellen über. Unsere Wellen, so lehren unsere Gleichungen, können nicht als aus Planwellenstückchen zusammengesetzt gedacht werden.

Der elektromagnetischen und der Scherungs-Welle ist gemeinsam die Beziehung $\mathfrak{w}^2 = a$, so daß

$$2(\mathfrak{w}\Gamma)\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\mathfrak{w}^2 = \operatorname{grad} a \qquad (19)$$

wird.

Infolgedessen finden wir in der Welle fortschreitend für das Maß der Abweichung der Änderung des Wellennormalenpaares von seiner (komplexen) Richtung, kurz für die Krümmung,

$$2[\mathfrak{w}, (\mathfrak{w}\Gamma, \mathfrak{w}]] = [\mathfrak{w}, \operatorname{grad} a]; \qquad (20)$$

entsprechend leiten wir für die Verdünnungswelle her

$$2[\mathfrak{w}, (\mathfrak{w}\Gamma)\mathfrak{w}]] = -\mathfrak{w}^2[\mathfrak{w}, \Gamma \operatorname{grad} D + i\nu \operatorname{grad} \mathfrak{j}_v]. \qquad (21)$$

Die Wellen sind also gekrümmt, und zwar lediglich durch die Gefälle der Körperparameter. Die Krümmung ist am stärksten im Scheitel der Bahn. Muß man insbesondere die Änderung der Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ bzw. der Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ in einer Welle untersuchen, so bieten sich folgende Ausdrücke dar:

$$(\mathfrak{w}'\Gamma)\mathfrak{w}' = {}^1\!/_4(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^*\Gamma)\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^* = {}^1\!/_8 \operatorname{grad}\{2(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}^{*2}\}, \qquad (22)$$

$$(\mathfrak{w}''\Gamma)\mathfrak{w}'' = -{}^1\!/_4(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*\Gamma)\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^* = {}^1\!/_8 \operatorname{grad}\{2(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) - \mathfrak{w}^2 - \mathfrak{w}^{*2}\}. \qquad (23)$$

Tiefer dringen wir ein, wenn wir eine Zerlegung von $\mathfrak{w}$ vornehmen. Dann gewährt uns der Ausdruck (19) Zutritt zu einem wichtigen Satz. Es sei $\mathfrak{f}$ die Einheitsnormale der Parameterflächen $a = \text{const}$ und ihre Richtung parallel $\operatorname{grad} a$. Wir zerlegen nun $\mathfrak{w}$ in eine Komponente $(\mathfrak{w}\mathfrak{f})\mathfrak{f}$ nach dieser Richtung und in eine Komponente $\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\mathfrak{f})\mathfrak{f} = \mathfrak{w}_t$, die in der genannten Parameterfläche liegt. Es gilt dann — wie in einer besonderen Untersuchung noch zutage treten wird — vermöge der Identität

$$\mathfrak{w}_t^2 + (\mathfrak{w}\mathfrak{f})^2 = \mathfrak{w}^2 = a \qquad (24)$$

für den Zuwachs der Komponenten, wenn man in Richtung von $\mathfrak{w}$ fortschreitet:

$$(\mathfrak{w}\Gamma)(\mathfrak{w}\mathfrak{f})\mathfrak{f} = {}^1\!/_2(\mathfrak{f}\operatorname{grad} a)\mathfrak{f} - (\mathfrak{w}\Gamma)\mathfrak{w}_t \qquad (25)$$

$$(\mathfrak{w}\Gamma)\mathfrak{w}_t = (\mathfrak{w}\mathfrak{f})\{(\mathfrak{w}\mathfrak{f})[\mathfrak{f}\operatorname{rot}\mathfrak{f}] - (\mathfrak{w}_t\Gamma)\mathfrak{f}\} + \{(\mathfrak{w}\mathfrak{f})([\mathfrak{w}\mathfrak{f}]\operatorname{rot}\mathfrak{f}) - (\mathfrak{w}_t(\mathfrak{w}_t\Gamma)\mathfrak{f})\}\mathfrak{f}. \qquad (26)$$

Aus den beiden Angaben ist jede $\mathfrak{w}$-Linie berechenbar, für welche in einem ihrer Punkte $\mathfrak{w}$ angebbar ist.

Hierzu tritt in allen umkehrbaren Wellen eine Aussage über die Divergenz des $\mathfrak{w}$-Feldes, die abhängig erscheint von $\mathfrak{w}$ und dem Gefälle gewisser Kombinationen von Körperparametern, wie die Gl. (4), (14) und (17) erkennen lassen. Diese gibt mit Rücksicht auf den eben entwickelten Satz das Maß für die Erweiterung oder Verengerung der unendlich dünnen, aus benachbarten $\mathfrak{w}$-Linien gebildeten Röhre, deren Achse die ins Auge gefaßte $\mathfrak{w}$-Linie ist. Eine solche Querschnittsänderung erfährt auch ein Wellennormalenstrang, dessen Achse parallel zu $\mathfrak{f}$ verläuft. Unter gewöhnlichen Verhältnissen ist sie sogar dann am stärksten, während in einem Scheitel sie verschwindet. Bei Darstellung in den erwähnten beiden Komponenten nimmt die Divergenzbeziehung die Form an:

$$([\mathfrak{w}\mathfrak{f}]\operatorname{rot}\mathfrak{f}) - (\mathfrak{f}\operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{f}]) + (\mathfrak{f}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{f})) = (\mathfrak{w}\mathfrak{f})\{(\mathfrak{f}\operatorname{grad}\log\dot{p}) - \operatorname{div}\mathfrak{f}\} + (\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\log\dot{p}); \qquad (27)$$

worin für $\dot{p}$ zu setzen ist:

bei magnetischen Wellen: a_e
„ elektrischen „ : a_m
„ elast. Scherungs- „ : $1/\varepsilon_g$ oder a/D
„ „ Verdünnungs- „ : $1/D$ od. $1/a\,(\varepsilon_v + {}^4\!/_3\varepsilon_g)$
„ Verdünnungs- „ : Γ/D oder $1/a\,D^2$

in reibungslosen Gasen.

An (1) und (5) bzw. an (10) und (14) lesen wir ab, daß die Schwingungsebene ihre Orientierung entsprechend der Richtungsänderung des Wellennormalenpaares ändert. Infolgedessen steht in einem einfachen Strahl die Schwingungsebene überall senkrecht zur Strahlachse, ebenso rot m und rot e bzw. rot j.

Wir wenden uns jetzt zu den oben genannten Arbeiten von Boussinesq und Gans. Ihre Voraussetzungen sind: ebene Schichtung und ein langsam veränderlicher, reeller Körperparameter. Herr Boussinesq, der elastische Scherungswelle zugrunde legt, begeht zunächst den prinzipiellen Fehler, daß er einfach in der Wellengleichung für homogene Körper den Körperparameter als veränderlich ansieht. Statt dessen muß man von der Wellengleichung unter (6) im § 4 ausgehen. Beide Autoren müssen mangels eines Leitseils Annahmen machen. Die eine lautet in unserer Formelsprache: $\mathfrak{w}^2 = a$. Damit treffen sie, wie wir jetzt urteilen können, das Richtige. Ihre zweite Annahme, daß die Komponente der Wellennormale parallel der Schichtung genommen konstant sei längs dem Strahle, trifft ebenfalls zu. Aber ihre weitere Annahme, daß sie auch längs der Schichtung konstant sei, ist unhaltbar. Wenn $\mathfrak{w}_t = \text{const}$. richtig wäre, müßte einerseits nach der Bedingung (4) sein:

$$(\mathfrak{f}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{f})) = (\mathfrak{w}\mathfrak{f})(\mathfrak{f}\operatorname{grad}\log a),$$

wenn wir wie üblich a_m konstant setzen, andererseits nach (24)

$$2(\mathfrak{w}\mathfrak{f})^2/a \cdot (\mathfrak{f}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{f})) = (\mathfrak{w}\mathfrak{f})(\mathfrak{f}\operatorname{grad}\log a).$$

Weil $(\mathfrak{w}\mathfrak{f})^2/a = 1 - \mathfrak{w}_t^2/a \neq {}^1\!/_2$ ist, haben wir einen Widerspruch. Die vierte Annahme

bezieht sich auf den Wellenvektor, der lediglich eine Funktion der Schichtnormalenlinie sein soll. Diese und die vorletzte Annahme sollen zum Ausdruck bringen, daß unsere Welle in den kleinsten Teilen Planwellencharakter habe. Das steht aber im Widerspruch zu unserem Gleichungssystem (1) bis (9) und zeitigt widerspruchsvolle Folgerungen, die am auffallendsten im Scheitel der Bahn sind. Da nach der dritten Annahme in Hinblick auf (24) sein soll:

$$2\,(\mathfrak{w}\mathfrak{k})\,(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}\mathfrak{k})) = (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,a),$$

so kann auch hier $(\mathfrak{w}\mathfrak{k})$ nicht verschwinden, die Wellennormale also keineswegs parallel der Schichtung liegen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß Herrn Gans die Rechnung zu dem Ergebnis führt: Bei einem gewissen Wert der Normalkomponente $(\mathfrak{w}\mathfrak{k})$ der Wellennormale wird die Welle an einer Schicht in vollem Betrage reflektiert, und zwar in der Art wie bei der sogenannten Totalreflexion an einem optisch dünneren Medium. Das wäre also innere Reflexion in einem stetig inhomogenen Körper, und noch dazu eine solche von endlichem Betrag in einer unendlich dünnen Schicht. Das ist nach einer früheren Darlegung[1]) unmöglich. Die Erfahrung und die in vorliegender Abhandlung entwickelte Theorie dieser Wellen lehren vielmehr übereinstimmend, daß der Strahl einen Scheitel ohne Knickung bildet; die Welle krümmt sich stetig durch den Scheitel der Bahn hindurch, wo sie einen Augenblick parallel der Schichtung läuft. Die Welle zeigt im Scheitel nichts Singuläres. Damit ist auf optischem Gebiet auch experimentell der Beweis erbracht, daß unsere Welle nicht aus unendlich kleinen Planwellenstückchen zusammengesetzt gedacht werden darf.

Ich benutze die Gelegenheit um folgende Fehler zu berichtigen:

Im laufenden Jahrgang dieser Zeitschrift muß es heißen auf

S. 172, Spalte 1, Zeile 11 von unten $a_e E$ statt: $i a_e E$,

S. 172, Spalte 2, Zeile 6 von oben $-a_m M$ statt: $-i a_m M$,

S. 303, Spalte 1, Zeile 14 von unten $w_2 = a.$ statt: $a_0^2/D_0 \cdot D/a$, was in in a_0^2/a übergeht, falls Wellen dieser Art allein im selben Gebiet vorhanden sind.

S. 372, Spalte 1, Zeile 1 von oben $+ V/2$ statt: $-V/2$.

1) K. Uller, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform; diese Zeitschr. 17, 369, 1916.

Gießen, Oktober 1916.

(Eingegangen 26. Oktober 1916.)

Über die Wirkung von Kristalldetektoren.

Von Bruno Thieme.

Einleitung.

Kürzlich wurde in einer Arbeit[1]) über die Gleichrichterwirkung des Siliziums im Zusammenhang mit seiner Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe berichtet. Da nun die Frage eines Zusammenhanges zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung letzten Endes lediglich in der drahtlosen Telegraphie von Bedeutung wird, so erscheint es mir nicht unbedenklich, die Versuche mit reinem Gleichstrom durchzuführen, denn die Praxis ergibt, daß bei Zuführung von Hochfrequenzenergie der Anteil der thermoelektrischen Kräfte hinter der reinen Gleichrichterwirkung bedeutend zurücktritt[2]). Wurde bei den obigen Versuchen (l. c., S. 375) die Kontaktstelle Platin—Silizium mit dem Lötrohr erhitzt, so blieb die Gleichrichterwirkung die gleiche. In der Praxis kann mit derart stabilen Kontakten nicht gearbeitet werden; die Stelle wird so empfindlich eingestellt, daß eine feine Druckänderung, wie sie schon leichte Erschütterungen oder geringe Temperaturunterschiede ergeben, eine Änderung der Gleichrichterwirkung, ausgedrückt durch veränderte Empfangslautstärke, erzielt.

Ferner ist bekannt, daß die Frequenz von merklichem Einfluß ist. Ein Detektor hat Maxima für bestimmte Frequenzen, unter Umständen auch noch gröbere Empfindlichkeit für die Zahl der Stromstöße in Perioden (Tonhöhe). Ergibt sich für eine bestimmte Frequenz ein guter Empfang und wird zwischendurch auf eine andere Frequenz gehört, so hat sich die Empfangslautstärke nach der Rückkehr zur ersten Frequenz meist wesentlich geändert. Ein Einfluß der Eigenfrequenz der Telephonmembran, der sonst ohne Zweifel zu berücksichtigen ist, wenn die Messungen nur nach der Lautstärke gemacht werden, kommt hierbei ebensowenig in Frage, wie etwa physiologische Einflüsse.

Früher wurde die Gleichrichterwirkung gerne als Wirkung von „Spitze gegen Platte", in Analogie zum Wehneltunterbrecher, aufgefaßt. Wie ich an anderer Stelle schon ausführte[3]), ist die Annahme falsch; denn im Kontakt stehen sich nicht Spitze und Platte, sondern tatsächlich zwei Platten (Flächen) mit kleiner gemeinsamer Berührungsebene gegenüber. Die Erklärung der größeren Stromdichte bei der Spitze kommt

1) F. Fischer u. E. Baerwind, diese Zeitschr. 17, 373, 1916.

2) Vgl. z. B. W. Pierce, Principles of wireless telegraphy. New York 1910.

3) B. Thieme, Zeitschr. f. techn. Physik 1 (1), 10, 1913.

nur in Frage, wenn eine Flüssigkeitsschicht dazwischen liegt, und keine direkte Berührung stattfindet. Auch solche reinen Polarisationsgleichrichter lassen sich, wie ich ausführen werde, an fast allen bekannten Detektorkombinationen beobachten.

Wie die Praxis vermuten ließ, ergaben meine Untersuchungen, daß es sehr wesentlich ist, unter welchem Winkel zur Kristallachse der Stromdurchgang stattfindet, und an welcher Stelle des Kristalls der erste Eintritt in das ganze Kristallkonglomerat erfolgt, oder, in anderer Vorstellung, unter welchem Winkel die eintretenden Elektronen auf die elektrische Hauptschwingungsebene zur Wirkung kommen. Über die nähere Natur dieser inneren Vorgänge lassen sich nur Vermutungen hegen; zur vollständigen Aufklärung wird für die Gleichrichterwirkung die neuere Gravitationstheorie herangezogen werden müssen.

Hier sei mir nur gestattet, auf einige wesentliche Punkte kurz an Hand der von mir angestellten, zum Teil weiter zurückliegenden Versuche einzugehen.

Symmetrische Kristallformen.

Wenn die zur Verwendung kommenden Kristalle einer zu den drei Raumachsen symmetrischen Kristallform angehören, so spielt die Lagerung des Kristalls selbst keine wesentliche Rolle. Wird in solchem Falle der Kontakt zwischen einem Pulver aus feinsten Kristallen und einer polierten Metallfläche hergestellt, so ergibt sich im allgemeinen eine Verstärkung der Gleichrichterwirkung, entsprechend dem verringerten Widerstande, bzw. dem vermehrten Stromdurchgang. Die Wirkung kennt ein Maximum in der Zahl der passierenden Elektronen, die der Hochfrequenzenergie entstammen; kommt ein reiner Thermoeffekt in Betracht, so muß die beobachtete Wirkung proportional zur Zahl der einzelnen Kontaktstellen geringer werden, da nur $\frac{1}{n}$ des Stromes wärmebildend auf den Kontakt der einzelnen Kristalle wirken kann, wenn n die Zahl dieser Kristalle ist.

Wir erkennen hier ein wichtiges Kriterium für Gleichrichter- oder Thermowirkung.

Verständlich ist, daß bei einer Mehrzahl kleiner Kristalle in festem gegenseitigen Zusammenhang bis zu einer gewissen mittleren Dicke der Kristallschicht die Gleichrichterwirkung sich steigern kann; die einzelnen Kristallagen sind dann als hintereinandergeschaltete Ventilzellen aufzufassen, die in gewisser Zahl der Aufeinanderfolge die Reinheit der Auslese steigern können; solche Effekte lassen sich beobachten, nur dürfen keine hochpolierten oder sonst ungünstig angeschliffenen Kristallflächen verwendet werden, wie sich auch aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt.

Solche Gleichrichtererscheinungen habe ich übrigens auch an Gasen und Kohlenstofflammen gezeigt[1]). Nach meinen bisherigen Erfahrungen müssen sich derartige Erscheinungen auch an flüssigen und fließenden Kristallen nachweisen lassen; gerade hierbei dürfte sich der Einfluß der Gleichrichterwirkung zwischen Stromrichtung und optischer Schwingungsebene besonders bedeutungsvoll studieren lassen.

Unsymmetrische Kristallformen.

Ist die Kristallform unsymmetrisch zur Lage der drei Raumachsen, so treten wesentlich verschiedene Umstände auf: Eine Schichtlage feiner Kristalle zwischen Metallelektroden gebracht, wirkt dann so, daß ein gewisser geringer Anteil Gleichrichterwirkung zeigt, der größere Teil der Kristalle aber nicht.

Somit tritt eine Gleichrichterwirkung nicht merkbar in Erscheinung und bei erhöhtem Stromeffekt kommt die thermoelektrische Kraft zur Geltung. Merkwürdig ist, daß bisher systematische Untersuchungen über die Kristallform bei den Detektoren in dieser Hinsicht nicht gemacht wurden.

Feuchtigkeitsschichten.

Von Fischer und Baerwind[2]) wurde auch die Frage aufgeworfen, ob die Gleichrichterwirkung überhaupt nichts mit der inneren Zusammensetzung des Siliziums zu tun hat, und lediglich die Oberflächenerscheinung einer Feuchtigkeitsschicht sei. Ein etwas angesäuerter Tropfen Wasser zwischen die Kontaktstellen gebracht, ließ Gleichrichterwirkung erkennen, aber stets nur in einer Richtung, während bei direktem Kontakt sofort der Unterschied zwischen positivem und negativem Silizium zutage trat. Dieses Ergebnis, das eine größere Flüssigkeitsmasse hervorbrachte, ist mir erklärlich: die Gegenelektrode aus Kristall tritt in ihrer elektrischen Wirksamkeit hinter ihrer Bedeutung als Fläche in der Anordnung zurück. Kommen aber reine Flüssigkeitshäutchen in Betracht, so kann nach meinen Erfahrungen die Sache doch anders werden. Voraussetzung ist wieder ein sogenannter unvollkommener Kontakt in günstiger Stellung für die Gleichrichterwirkung. Eine solche Flüssigkeitshaut ist dem Kristall kein Fremdkörper mehr, sondern verbindet sich in den Grenzschichten als gewisse

1) B. Thieme, Zeitschr. f. phys. Chemie **89**, 693, 702 u. 710, 1915.

2) l. c. S. 375 unten.

Einheit mit dem Kristallgefüge, zum mindesten in elektrischer Hinsicht. Bei der elektrischen Belastung des Wassers werden dann auch die Kristallsysteme in Mitwirkung gebracht. Solch ein Einfluß konnte an verschiedenen gebräuchlichen Kristallen für unvollkommenen Kontakt nachgewiesen werden.

Der Einfluß der Feuchtigkeitsschicht ist zuweilen beim Kristalldetektor sogar maßgebend, indem völlige Entfernung dieser Schicht Aufhören der Gleichrichterwirkung bedingt. Praktisch findet sich solche Schicht auf fast jedem Körper vor; sie von Kristallen zu entfernen ist so gut wie unmöglich, da das Kristallwasser stets neue Dämpfe entwickeln kann, die sich dann kondensieren.

Zum Beweis diente folgender Versuch[1]).

In eine funkentelegraphische Empfangsanordnung wurde in bekannter Weise ein Detektor eingeschaltet, dessen Kontaktteile beiderseits aus hochpoliertem Kupfer, in Form von Spitze und Platte, bestanden. Bei geeignetem unvollkommenen Kontakt wurde empfangen, und zwar mit etwa $^1/_3$ der Lautstärke bei Verwendung normaler Kristalldetektoren.

Mit zunehmender Entfernung der Feuchtigkeit aus der Umgebung auf physikalischem Wege und damit von den Kontaktflächen, wurde der Empfang schlechter. Das Saitengalvanometer zeigte anfangs ein Verhältnis der Stromwerte in beiden Richtungen von 1:9 an, das sich allmählich bis zu 2:3 änderte; damit hörte praktisch der Empfang auf.

Wesentlich bei solchen Messungen, wenn sie überhaupt einen Wert haben sollen, ist stets die gleichzeitige Benutzung eines Telephons (Untersuchung auf Tonreinheit usw.), Saitengalvanometers (Größe der Ströme in beiden Richtungen) und eines Lautstärkemessers. Später komme ich darauf noch kurz zurück.

Der vermutete Einfluß einer Thermokraft ist bei allen diesen Vorgängen nur mit größter Vorsicht zuzulassen. Ohne Zweifel entsteht eine thermische Wirkung am unvollkommenen Kontakt beim Stromdurchgang. Da die Widerstandswerte dieser Kontakte recht hoch zu sein pflegen, kann die örtliche Erhitzung auch möglicherweise merkliche Größe annehmen; für die thermoelektrische Wirkung dürften aber die hervorgerufenen Effekte doch zu geringfügig sein.

Es darf nicht vergessen werden, daß die Thermokraft eine Funktion der Zeit, wenigstens bis zu einem gewissen Abschnitt, ist, wohingegen die Gleichrichterwirkung eine Funktion des Potentials ist. Entweder nimmt man an, die Kontakte leiten so gut die entstandene Wärme ab, daß die Thermokraft den ca 500 Tonschwingungen/sec mit allen Feinheiten folgen kann, dann dürfte die Thermokraft nie Werte annehmen können, die imstande sind, das Telephon zu erregen, bzw. den Blockkondensator aufzuladen, oder aber es wird das Gegenteil vorausgesetzt, und es müßte die Wirkung sich bis zu einem gewissen Zeitpunkt erhöhen. Dieses ist nicht der Fall.

Denkbar ist wohl nur noch, daß thermische Effekte die Kontaktteile selbst beeinflussen, so daß mechanische Schwankungen entstehen, die den erregenden Strömen folgen. Aber alle diese Erklärungen erscheinen gezwungen, wenn man daneben lediglich die Kristallform betrachtet.

Auch die Erfahrungen von C. Tissot[1]), die scheinbar thermoelektrische Kräfte dartun, sprechen für die neue Auffassung, die ich näher durch die gemachten Versuche begründen will.

Beobachtungen.

Die Kristalle können aufgefaßt werden als eine größere Anzahl parallel und in Serie geschalteter Ventilzellen. Das mechanisch eingeschlossene Wasser oder das Kristallwasser bilden die Polarisationsschicht zwischen den Kristallelektroden des Innern. Die Dicke des Kristalls sollte einen Einfluß haben. Tatsächlich wird aber beobachtet, daß auch eine sehr dünne Kristallscheibe noch mit gleicher Güte arbeitet (wenn nicht die geänderten Widerstandsverhältnisse die Schwingungsdaten des Meßkreises ändern). Die Fläche darf aber nicht geschliffen oder hochpoliert sein; wesentlich ist ferner, ob eine natürliche Kristallfläche oder eine Bruchfläche zum Kontakt verwendet wird. Einige, sonst gut brauchbare Kristalle, zeigen an bestimmten Flächen überhaupt keine Gleichrichterwirkung.

Ganz fein zerriebenes Kristallpulver (also zerstörte kleinste Kristalle) zeigt im allgemeinen keine Gleichrichterwirkungen; die Ordnung der einzelnen Moleküle zueinander ist demnach von größtem Einfluß. Es kommt darauf an, wie der Eintrittswinkel der Stromrichtung zu der Kristallachse liegt; die darunter befindlichen Schichten lassen dann den Strom in gleicher Weise passieren. Dies erklärt das obige Ergebnis, nach dem die Stärke der Platte ohne Einfluß war; als geläufiges Beispiel möchte ich eine Anzahl Nicols heranziehen. Sind alle gleichgerichtet, so kommt es nur darauf an, wie das Licht in die erste Schicht der Nicols einfällt. Die Zahl der dahinterliegenden Nicols ist dann — außer durch geringe Lichtschwächung —

1) Zeitschrift für technische Physik 1 (1), 10, 1913.

1) l'Electricien 39, 331, 1910.

ohne Einfluß. Liegen alle Nicols (entsprechend dem fein pulverisierten Kristall) bunt durcheinander, so findet auch kein Lichtdurchgang statt.

Kristalle des regulären Systems zeigen sich denn auch unabhängiger von der Eintrittslage, als die anderer Systeme; aber selbst bei gleicher, nur um 90° oder 180° gedrehter Lage der optischen Achse ist ein Unterschied in der Gleichrichterwirkung bemerkbar, hervorgerufen durch die Beschaffenheit der jeweiligen Oberfläche, und hierbei möchte ich dem Kristallwasser, bzw. der aufliegenden Flüssigkeitsschicht, die bestimmende Hauptrolle zuweisen.

Damit ist nun nicht gesagt, daß Kristalle des regulären Systems sich am besten zu Detektoren eignen. Mit gleichem Rechte ließe sich sonst behaupten, daß sich Steinsalz als Kristall regulären Systems besser für optische Polarisation eignet als das hexagonale System des Kalkspats. Allerdings ist auch hier der Begriff elektrischer Polarisation mit Bezug auf die optischen Kristallachsen vorsichtig zu bewerten.

Charakteristisch hierfür ist der Gneis; ein geschichteter Granit, der in parallelen Ebenen schwarzen Glimmer enthält. Feldspat herrscht vor und bedingt die rötliche Farbe. Der Gneis gehört somit zu den gemengten Gesteinen. Gemengteile, die sich zufällig finden, sind z. B. Graphit, Turmalin, Magneteisenstein u. a. Das bedingt auch je nach Ursprung und Flächenbruch eine ganz besondere Wirkung, wobei die Kristalle, die im Gneis als in kristallinisch fester Lösung befindlich zu betrachten sind, besonders hervortreten. Die Bedeutung der Mischkristalle und aller Körper, die in amorpher oder kristallinischer Lösung in dem Detektorkristall, meist zahlreicher als vermutet wird, vorhanden sind, darf nicht unterschätzt werden.

Dabei erklärt sich, daß eine Metallspitze gegen eine Kristallfläche angesetzt bessere Wirkungen ergibt, als eine Kristallspitze gegen eine Metallfläche. Es ist ganz besonders schwer und lediglich dem Zufall überlassen, wenn in diesem letzten Falle der richtige Eintrittswinkel getroffen wird.

Eine Kristalloberfläche[1]) mit parallel angeritzten Linien gibt im allgemeinen gesteigerte Wirkung, wenn die Metallspitze gegen die Kante der geritzten Linie stößt. Wasserhaltiger Alkohol zwischen die etwas voneinander entfernten Detektorteile gebracht[2]), ergibt eine geringere Wirkung (entsprechend dem gesteigerten Widerstand), die annähernd proportional dem erhöhten Abstand sinkt.

1) Polierte und geschliffene Kristallflächen geben keine Wirkung.

2) Ztschr. f. techn. Physik, S. 10, 1913.

Einen besonders markanten Fall will ich noch erwähnen:

Detektoren aus reinem Kupfer zeigen annähernd keine Gleichrichterwirkung, wenn die Flüssigkeitshaut entfernt ist. Kupfer gehört dem regulären System an, die Kristalle sind aber unregelmäßig verwachsen.

Wird die Kontaktfläche nun angeätzt, so daß sich aus der polierten Metalloberfläche im Stereomikroskop das Tiefengefüge deutlich erkennen läßt, so tritt eine kräftige Gleichrichterwirkung im Verhältnis 1 : 8 ein. Ein etwaiger Einfluß der sich bildenden Oxydschicht konnte nicht festgestellt werden. Der Kontaktdruck spielt nur eine sekundäre Rolle, insofern dadurch ein günstigster Zustand für den Eintritt des Stromes erreicht, bzw. gestört wird.

Noch wesentlich verstärkt würde die Wirkung (bis auf 1 : 10), wenn Kupfer und Silber zu einer Legierung mittlerer Konzentration verschmolzen wurden; es entstehen hierbei zwei Gemenge heterogener Metallarten, regulär und in Oktaedern kristallisiert, nämlich solche von schwach silberhaltigem Kupfer und solche von schwach kupferhaltigem Silber, die aber keine eigentlichen Mischkristalle bilden. Wir haben es hier nur mit Gemengen, nicht aber mit festen Lösungen zu tun. Es ist anzunehmen, daß die Lagerung für den Übertritt des Stromes besonders günstig ist.

Noch interessanter sind die Fälle, wo wir es mit wahren Mischkristallen[1]), so z. B. beim Kupfer und Nickel, zu tun haben. Die hierbei angestellten Untersuchungen haben zum Teil zu überraschenden Ergebnissen geführt, deren Veröffentlichung ich mir vorbehalte. Jedenfalls steht fest, daß der Weg über das Studium der Kristalle selbst nicht unwesentlich zur Erkenntnis der Gleichrichterwirkungen im Kristall ist, und hierbei lassen sich gerade die metallischen Kristalle meist systematisch herstellen und anwenden, insbesondere in bezug auf ihre planmäßige Verwendung von Mischkristallen; die gewonnene Erkenntnis über den Zusammenhang zwischen Elektronenleitung und Kristallachsen wird für diese Fälle auch der reinen Physik von Vorteil sein.

1) Es ist hierbei zu unterscheiden zwischen geschliffen-polierten und geätzten Flächen, sowie Bruchflächen; auch ändert sich das Ergebnis mit schneller oder langsamer Abkühlung der Schmelze.

Berlin, im Oktober 1916.

(Eingegangen 3. November 1916.

Ein einfaches Saitenelektroskop.

Von C. W. Lutz.

Für viele elektrostatische Messungen genügt ein Instrument von der Empfindlichkeit des Blättchenelektroskops. Trotz seiner bekannten Mängel wird daher dieses Elektroskop noch heute vielfach verwendet, wohl hauptsächlich wegen seiner äußerst einfachen Handhabung.

Im folgenden möchte ich ein „Saitenelektroskop" beschreiben, das an Einfachheit der Handhabung den Blättcheninstrumenten nicht nachsteht, trotzdem aber alle Vorzüge des Saitenprinzips besitzt. Bei entsprechender Spannung der Saite läßt sich zudem eine höhere Empfindlichkeit oder ein weit größerer Meßbereich als beim Blättchenelektroskop erzielen. Da auch bei unvorsichtiger Aufladung die Saite nicht leicht reißt, das Instrument überhaupt keinerlei besondere Vorsicht in der Behandlung verlangt, so dürfte es sich auch zu Messungen im Freien, im physikalischen Praktikum und in der Radiumtherapie eignen.

Fig. 1 zeigt das Saitenelektroskop im Längsschnitt, Fig. 2 in photographischer Ansicht. Es besteht im wesentlichen aus zwei selbständigen Konstruktionsteilen, dem Einsatz K—B (Fig. 1) und dem Gehäuse G. Ersterer setzt sich zusammen aus der Kopfplatte K und dem daran befestigten Bügel B. Nach Lösung der beiden Schrauben 1 und 2 und Entfernung des Mikroskops M (Fig 2) kann der Einsatz senkrecht nach oben aus dem Gehäuse herausgezogen werden.

Am Bügel B (Fig. 1) ist die Saite S, ein Platindraht von 2,5 μ Dicke und 45 mm Länge, ausgespannt und leitend mit demselben verbunden. Bügel und Saite werden von einer polierten Quarzplatte Q getragen und sind dadurch vom Gehäuse isoliert. Der Saite gegenüber steht die Schneide *Sch*, die an der Bodenplatte P des Gehäuses befestigt ist und mit diesem stets geerdet wird (Erdungsklemme e Fig. 2). Beim Aufladen des Elektroskops über die Stecksonde *St* (Fig. 1) wird die Saite von der gleichfalls mitgeladenen Bügelstange B abgestoßen und von der geerdeten Schneide *Sch* angezogen. Die Größe der Durchbiegung wird dnrch das Mikroskop M (Fig. 2) mit Okularmikrometer gemessen. Das Elektroskop wird im allgemeinen nur in dieser einen Schaltung (Doppelschaltung) verwendet und muß empirisch

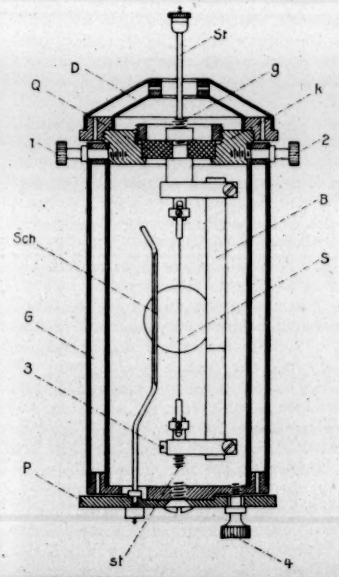


Fig. 1.

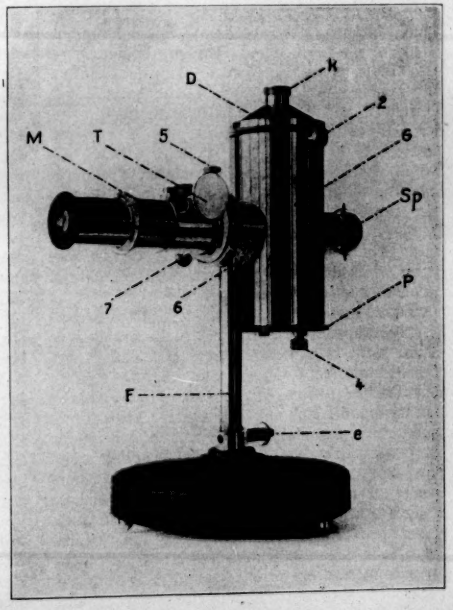


Fig. 2.

geeicht werden. Für besondere Zwecke wird das Instrument auch mit isolierter Schneide geliefert und kann dann auch in Differentialschaltung gebraucht werden.

Besondere Vorkehrungen wurden getroffen, um alle Wärmeeinflüsse unschädlich zu machen, die in hohem Maße die Angaben eines Saiteninstruments stören können. Diesem Zwecke dient in erster Linie eine einfache und verläßlich wirkende Temperaturkompensation, die gleich mit dem Träger B (Fig. 1) vereinigt ist. Die runde Bügelstange B besteht nämlich im oberen Teile aus Messing, im unteren Teile aus Stahl. Die wirksamen Längen dieser beiden Stücke wurden durch Ausprobieren im Thermostaten gefunden. Außerdem erwies sich auch noch ein Schutz gegen Wärmestrahlung als notwendig. Zu diesem Zwecke sind das Gehäuse G (Fig. 1) und der Deckel D doppelwandig ausgeführt und vernickelt. Durch den Zwischenraum kann Luft hindurchstreichen.

Im Bestreben, die Konstruktion möglichst einfach zu gestalten, wurde auf die Verwendung eines von außen her zu bedienenden Spannkopfes ganz verzichtet. Durch eine einfache Vorrichtung kann indessen die Saitenspannung um hinreichend kleine Beträge geändert werden, um, wenn erwünscht, Empfindlichkeit und Meßbereich innerhalb der möglichen, ziemlich weiten Grenzen zu verändern. Dies ermöglicht eine dem Instrument beigegebene Schraubenmutter mit Teilung, welche, nach Herausnahme des Einsatzes, auf den unteren Befestigungstift St der Saite aufgeschraubt wird. Nach mäßiger Lockerung der Schraube 3 wird durch Anziehen der Mutter um 1 bis 2 kleine Trommelteile die Saite gespannt, durch Hineindrücken der etwas zurückgeschraubten Mutter entspannt. In dieser Weise läßt sich leicht eine schwache, mittlere und starke Saitenspannung erzielen und damit einer der weiter unten angeführten Meßbereiche herstellen.

Das Mikroskop M (Fig. 2), von 75facher Vergrößerung, ist durch drei Druckschrauben 5, 6 und 7 am Gehäuse befestigt. Die Einstellung das Mikroskops auf die Saite erfolgt durch den Trieb T, wobei ein zu weites Hineinschrauben und damit eine Gefährdung der Saite durch einen Anschlag verhindert wird. Zur Beleuchtung von rückwärts dient der allseits verstellbare Spiegel Sp. Durch Lockern der einen unteren Druckschraube (6 oder 7) und gleichzeitiges Anziehen der gegenüberliegenden kann das Mikroskop seitlich verschoben und so die Saite sehr genau auf den Nullpunkt des Okularmikrometers eingestellt werden. Durch Zurückschrauben der drei Druckschrauben 5, 6 und 7 läßt sich das Mikroskop ganz abnehmen.

Das Okularmikrometer besitzt 50 Skalenteile und trägt einen Längsstrich durch die ganze Teilung, wodurch eine scharfe Ablesung ermöglicht wird. Damit das Saitenbild auch bei den größten Ausschlägen gleichmäßig scharf im Mikroskop erscheint, läßt sich die Schneide Sch (Fig. 1) mittels der Platte P nach vorwärts oder rückwärts drehen und in der richtigen Lage durch die Schraube 4 festklemmen. Diese Verstellung kann bei geladenem Elektroskop von außen her vorgenommen werden und ist überhaupt nur nötig, wenn eine neue Saite eingezogen wurde.

Die Zuleitung zur Saite erfolgt durch die dünne Stecksonde St (Fig. 1). Es kann aber auch ein größerer Instrumententeil, etwa eine Kondensatorplatte oder ein Zerstreuungskörper, auf das 4 mm-Gewinde g des Bügels B aufgeschraubt werden. Oder es wird das Elektroskop selbst mit dem Gewinde der Kopfplatte K in einen anderen Apparat eingeschraubt. Dabei ist seine Lage ganz gleichgültig, denn das Saitenelektroskop kann auch horizontal und überkopf verwendet werden. Selbstredend ist bei dieser Verwendungsart erst der schwere Gußeisenfuß F (Fig. 2), auf dem das ganze Instrument ruht, kurz am Gehäuse abzuschrauben und der Deckel D zu entfernen.

Wie eingangs erwähnt, besitzt das Saitenelektroskop nur einen einzigen Isolator, der aus einer geschliffenen und polierten Quarzglasplatte (geschmolzener Bergkristall) besteht. Dieses Material eignet sich nach meinen Erfahrungen viel besser für elektrostatische Meßinstrumente und namentlich für Saitenelektrometer als echter Bernstein, und zwar aus folgendem Grunde. Bei stärkerer Abkühlung tritt nämlich eine bleibende Zusammenschrumpfung des Bernsteinkörpers ein, so daß eingeklemmte Isolatoren dadurch locker werden und tiefer in ihren Sitz einsinken. Von diesem Mangel ist nun geschmolzener Quarz frei. Dabei isoliert geschliffenes und sorgfältig poliertes Quarzglas bei richtiger Behandlung ebenso vorzüglich wie echter Bernstein. In dem Zustande, in dem der polierte Quarz aus der Fabrik bezogen wird, isoliert er freilich ganz ungenügend. Die Ursache davon ist eine schwach leitende Oberflächenschicht, die von Rückständen aus dem Polierverfahren herrührt. Diese leitende Schicht wird durch Auskochen in Salz- und nachher Salpetersäure mit darauffolgendem Waschen in absolutem Alkohol und destilliertem Wasser vollständig entfernt. Ich habe Quarzstücke verschiedener Form und verschiedener Herkunft untersucht und bei allen durch das obige Verfahren eine vorzügliche Isolation erreicht. Vergleichende Isolationsmessungen

mit gleich großen, frisch gereinigten Bernstein- und Quarzplatten im geschlossenen Saitenelektroskop ergaben in beiden Fällen denselben Spannungsverlust von 0,3 Volt pro Stunde, bei einer Anfangsladung von 100 Volt. Ein Teil dieses Elektrizitätsverlustes wird durch die nie fehlende Leitfähigkeit der Luft im Innenraum des Elektroskops verursacht, die am Anfang der Isolationsmessung, kurz nach dem Verschließen des Elektroskops, verhältnismäßig groß ist.

Zu demselben günstigen Ergebnis führten Isolationsprüfungen von polierten Quarzstäben.

Alle diese Messungen zeigen, daß das Isolationsvermögen des geschmolzenen, geschliffenen und polierten Quarzes ein ganz vorzügliches ist und dem des echten Bernsteins nicht nachsteht.

Ist die Isolation im Laufe der Zeit aus irgendwelchen Gründen schlechter geworden, so wird sie durch mehrstündiges Einlegen des Quarzisolators in kalte Salpetersäure und nachfolgendes Waschen mit absolutem Alkohol und destilliertem Wasser vollkommen wieder hergestellt. In den meisten Fällen genügt aber schon ein bloßes Reinigen mit destilliertem Wasser.

Nebenbei möchte ich erwähnen, daß im Schmelzfluß hergestellte und nicht weiter bearbeitete Quarzstücke schon ohne Säurebehandlung, nur nach gründlicher Reinigung ihrer Oberflächen vorzüglich isolieren. Leider läßt sich durch Schmelzen allein der Quarz nicht in eine so regelmäßige Form bringen, daß er als Instrumententeil verwendet werden könnte. Für Versuchszwecke ist aber immerhin dieser feste und billige Isolator recht wohl zu gebrauchen[1]).

In Fig. 3 sind Eichkurven für drei verschiedene Saitenspannungen dargestellt, und zwar a für schwache, b für mittlere und c für starke Saitenspannung. Durch entsprechende Änderung der Saitenspannung in der oben angegebenen Weise lassen sich je nach Bedürfnis Eichkurven erhalten, die zwischen den eingezeichneten liegen. In nachstehender Tabelle sind die zu den Eichkurven der Fig. 3 gehörigen Meßbereiche, sowie die Empfindlichkeiten für mittlere Saitenausschläge zusammengestellt. Bei der scharfen Ablesung, die ein Vorzug aller Saiteninstrumente ist, lassen sich leicht Zehntel-Skalenteile schätzen, so daß bei mittleren Saitenausschlägen noch Potentialänderungen beobachtet werden können, die den zehnten Teil der in Spalte 3 angegebenen Werte betragen.

Saitenspannung (Tr. T.)	Meßbereich Volt	Mittl. Empfindl. Volt/Skt.
a) Schwach (0,4)	4—98	1,5
b) Mittel (1,2)	7—305	4
c) Stark (1,6)	16—970	17

Die Handhabung des Saitenelektroskops ist äußerst einfach. Ist einmal das Mikroskop auf 0 eingestellt, so braucht nur die Kapsel K (Fig. 2) abgezogen und die Zuleitungssonde aufgesteckt zu werden, um das Elektroskop gebrauchsfertig zu machen. Eine Aufstellung des Instruments auf eine genau horizontale Unterlage ist überflüssig, wenn nur jedesmal der Nullpunkt genau eingestellt wird, denn nur dann entsprechen den abgelesenen Ausschlägen die der Eichkurve zu entnehmenden Voltzahlen. Noch weniger als durch kleine Schwankungen werden die Ablesungen durch Erschütterungen beeinflußt. Insbesondere stören bei stärkerer Saitenspannung selbst kräftige Erschütterungen gar nicht.

Die Aufladung des Elektroskops geschieht am besten mit Hilfe des „Ladestabes" von Spindler & Hoyer. Bei starker Saitenspannung kann mittels einer geriebenen Hartgummistange bis zum Einsetzen der Selbstentladung (— 1150 Volt) aufgeladen werden, ohne daß dadurch die Saite zerreißt. Die erstmalige Höchstladung kann unter Umständen ein Ausrecken kleiner Krümmungen der Saite bewirken, das sich in

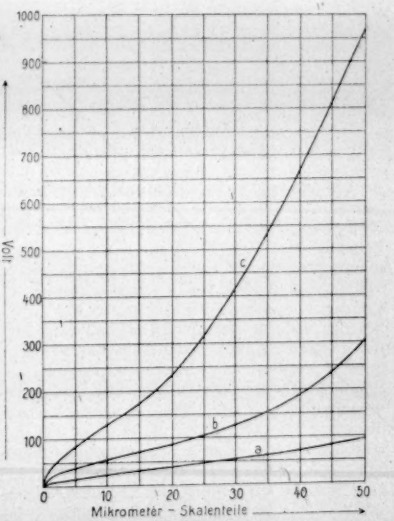


Fig. 3.

1) Quarzisolatoren liefert W. C. Heraeus, Hanau. Die geschliffenen und polierten Quarzisolatoren sind nicht teurer als solche aus echtem Bernstein.

einer geringfügigen Verlegung des Nullpunktes kenntlich macht. An Elastizität büßt die Saite dadurch nichts ein; nur wird das Elektroskop etwas empfindlicher und muß in diesem Falle neu geeicht werden.

Das Saitenelektroskop läßt sich auch zum Registrieren und Projizieren verwenden, wobei gleich das Mikroskop selbst als Projektionskopf verwendet werden kann. Die Okularskala wird mitprojiziert.

Die Hauptmaße des Elektroskops ohne Fuß sind: Durchmesser 50 mm, Höhe mit Deckel 120 mm, Gewicht 760 g. Die Kapazität (ohne Deckel und Sonde) beträgt 6 cm.

Das Instrument wird von der Firma Edelmann in München hergestellt.

Die bei der Konstruktion dieses Elektroskopes gesammelten Erfahrungen habe ich zur Verbesserung meines früher beschriebenen Saitenelektrometers[1]) verwertet, worüber in einer späteren Arbeit berichtet werden soll.

Der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften verdanke ich die Mittel zur Beschaffung einiger Hilfsinstrumente, die zu den vorstehenden Messungen notwendig waren. Ich möchte mir daher gestatten, auch an dieser Stelle hierfür meinen besten Dank auszusprechen.

1) Diese Zeitschr. **13**, 954, 1912.

München, Magnet. Observatorium b. d. Sternwarte, November 1916.

(Eingegangen 13. November 1916.)

Gleichheitsphotometer für Röntgenstrahlenhärtemesser.

Von H. Seemann.

Die bisher im Gebrauch befindlichen Röntgenstrahlenabsorptionshärtemesser, bei denen die Helligkeit zweier Felder eines fluoreszierenden Leuchtkörpers (Leuchtschirm) durch zwei zwischengeschaltete Absorptionskörper mit verschiedenen absorbierenden Eigenschaften auf Gleichheit eingestellt wird, gestatten ebenso wie bei den rein optischen Gleichheitsphotometern die genaueste Ablesung der Helligkeitsgleichheit dann, wenn die Vergleichsfelder vom Auge ohne Saum unmittelbar aneinander angrenzend gesehen werden. Diese Bedingung kann bei den bis heute bekannten Härtemessern der gekennzeichneten Art, die nicht mit Prismenoptik versehen sind, niemals in genügender Vollkommenheit erreicht werden, da die endliche Ausdehnung des Brennflecks der Röntgenröhren, besonders der Therapieröhren, vor allem aber die Überstrahlung innerhalb des fluoreszierenden Körpers es nicht ermöglicht, vollkommen saumlose Schatten der absorbierenden Körper unmittelbar aneinander angrenzend auf dem Leuchtschirm zu entwerfen.

Der zu beschreibende Gedanke ist nun der, bei solchen Röntgenstrahlenhärtemessern, bei denen gleiche Helligkeit der Fluoreszenz von Leuchtschirmen abgelesen werden soll, Biprismen zu verwenden, die bewirken, daß dem beobachtenden Auge die Vergleichsfelder saumlos unmittelbar aneinander anzugrenzen scheinen.

Ihre Verwendung in der speziellen Form der Fig. 6 ist bei Photometern bekannt, z. B. beim Martensschen Polarisationsphotometer. Von der Verwendung des Lummer-Brodhunschen Photometerwürfels soll abgesehen werden, weil er nicht geradsichtig ist und Linsenoptik erfordert, ferner auch binokulares Sehen nicht ermöglicht.

Im vorliegenden Falle soll unter Biprisma ganz allgemein jedes aus zwei Prismen derart zusammengesetzte System verstanden werden, daß die Komponenten, von denen das eine das Spiegelbild des anderen an einer Symmetriefläche ist, entweder mit den brechenden Kanten oder mit den Basen zusammenstoßen, und zwar in der Weise, daß mindestens zwei der brechenden Flächen in einer scharfen Raumkante (Symmetriekante) zusammenstoßen, die in der Symmetriefläche liegt.

Unter Prisma ist im weitesten Sinne jeder zum Zwecke der Ablenkung von Strahlenbündeln durch Brechung konstruierte Glaskörper zu verstehen, dessen Hauptschnitt ein geradliniges oder krummliniges Dreieck ist, in dem eine Seite als Basis, die gegenüberliegende Ecke als brechender Winkel und die beiden andern Seiten als brechende Flächen aufzufassen sind. Es sind also auch Prismen mit zylindrischen oder kegelförmigen brechenden Flächen, endlich auch Linsensegmente als Komponenten von Biprismen anzusehen, insofern als für den vorliegenden Zweck nicht ihre axial oder zentral sammelnde oder zerstreuende Wirkung benutzt wird, sondern nur die einseitige Ablenkung von oder zur Symmetriefläche.

Das Biprisma ist in allen Fällen derart zwischen dem Auge und den Vergleichsfeldern angeordnet, daß seine Symmetriefläche zwischen den Vergleichsfeldern hindurch verläuft und die Symmetriekante parallel den Vergleichsfeldern. Dabei ist es gleichgültig, ob die Symmetriekante auf der dem Auge oder den Vergleichsfeldern zugewandten Seite des Biprismas liegt.

Es mögen zunächst einige bisher für Photometer noch nicht verwendete Typen von Biprismen beschrieben werden, die mit ihren

brechenden Kanten zusammenstoßen. Sie könnten Konkavbiprismen genannt werden. In Fig. 1 ist $ESGJH$ der Hauptschnitt eines geraden Konkavbiprismas mit den ebenen brechenden

Fig. 1.

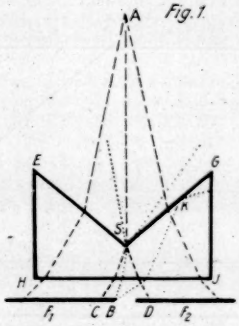


Fig. 2.

Fig. 3.

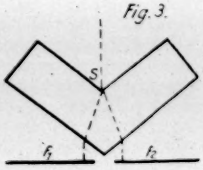
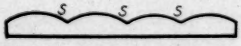


Fig. 4.

Fig. 5.



Flächen ES, GS, und HJ. A ist der Ort des Auges, f_1 und f_2 sind in allen Figuren die fluoreszierenden Vergleichsfelder des Röntgenhärtemessers, die hier beispielsweise in einer Ebene liegen mögen. Die absorbierenden Körper des Härtemessers sind unterhalb f_1 und f_2 zu denken, die Röntgenröhre so angeordnet, daß der Röntgenschatten der absorbierenden Körper auf f_1 und f_2 fällt. Durch A und S läuft die in diesem Falle ebene Symmetriefläche senkrecht zur Zeichenebene.

Es können nun von allen Punkten von f_1 durch die Fläche ES und desgleichen von f_2 durch die Fläche GS Strahlen nach A gelangen, mit Ausnahme der zwischen C und D gelegenen Punkte oder umgekehrt, der ganze zwischen den Strahlen CS und DS gelegene Raum ist von A aus nicht sichtbar. In der Symmetriekante S scheinen daher die Punkte C und D vereinigt, d. h. die Fläche f_1 grenzt für den Beobachter in A mit ihrer scheinbaren Kante C an die scheinbare Kante D der Fläche f_2 unmittelbar an.

Strahlen, die von irgendeinem zwischen C und D gelegenen Punkte B kommen, treffen den Punkt A nicht. Der Strahl BS nimmt den Verlauf der punktierten Linien von S aus. Der Strahl BK und alle, die noch weiter nach G zu laufen, werden in K total reflektiert und treten durch die Basis GJ aus.

Der Abstand CD wird umso größer, je mehr sich der brechende Winkel der Biprismenkomponenten 90^0 nähert und umso kleiner, je mehr er sich 0^0 nähert. Da der Raum zwischen den Strahlen CS und DS optisch nicht mitwirkt, so kann er mit beliebigem optisch nicht aktivem Material ausgefüllt werden. Daraus ergibt sich, daß man dieses Konkavbiprisma auch aus zwei Prismen zusammensetzen kann, die nur in der Kante S genau zusammenstoßen.

Eine besonders einfache Ausführung dieses zusammengesetzten Biprismas ist in Fig. 2 wiedergegeben. Die Neigung der Prismen gegeneinander kann beliebig sein.

Fig. 3 zeigt, daß auch zwei verkittete oder auch ohne Kitt zusammengepaßte planparallele Platten einen Raum entstehen lassen, der von A aus nicht gesehen werden kann. Er ist umso breiter, je steiler die Platten gegeneinander geneigt sind und je dicker sie sind.

Fig. 4 zeigt den Hauptschnitt eines Biprismas aus Zylinder- oder Kugellinsensegmenten. Letzteres hat eine kreisförmige Symmetriekante S.

Fig. 5 stellt den Hauptschnitt eines aus mehreren solchen Zylinder oder Kugellinsen zusammengesetzten Systems dar. Letztere können schachbrettartig zu ganzen Feldern vereinigt werden für entsprechende Vergleichsfelderfiguren.

Die zweite Gruppe von Biprismen, die man im Gegensatz zu den oben dargestellten als Konvexbiprismen bezeichnen könnte, ist in Fig. 6 bis 9 dargestellt. Der in Fig. 6 wiedergegebene Typ ist der, den man gewöhnlich allein als

Biprisma bezeichnet. Wie ohne weiteres ersichtlich, kreuzen sich hier die Strahlenbündel, so daß die äußeren Randgebiete von f_1 und f_2 in S zusammenzufallen scheinen. Die Felder

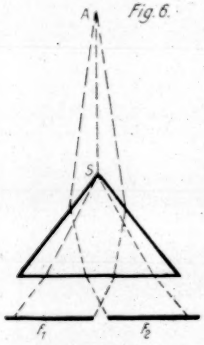


Fig. 6.

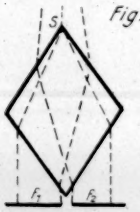


Fig. 7.

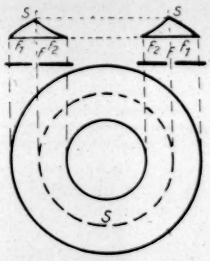


Fig. 8.

Fig. 9.

werden wie durch Parallelverschiebung vertauscht.

Fig. 7 stellt eine Verdoppelung von Fig. 6 dar mit rhombischem Hauptschnitt. Mit quadratischem Hauptschnitt, also als Würfel, leistet sie dieselben Dienste.

Die Symmetrieflächen aller bisher beschriebenen Biprismen sind Ebenen. Es möge in Fig. 8 und 9 noch je eine Ausführung mit zylindrischer und kegelförmiger Symmetriefläche dargestellt werden. Es sind Ringprismen. Fig. 8 zeigt zwei doppelt gekrümmte und eine ebene brechende Fläche. Erstere sind leicht zu schleifende Kugelzonen. Fig. 9 besitzt zwei gerade kegelförmige und eine kugelförmige Fläche. Die Form 8 ist im Hauptschnitt und in der Aufsicht dargestellt. F ist die Spur des Symmetriezylinders. In Fig. 9 ist M die Spur des Symmetriekegels. f_1 und f_2 müssen für beide Ausführungen konzentrische Ringe sein, bei 9 am besten konzentrische Kegelringe symmetrisch zum Kegel M.

Die brechenden Eigenschaften des Biprismas müssen also allgemein gesprochen die sein, daß sie ein vom Punkte A ausgehendes Strahlenbündel an der Symmetriekante in zwei Teile spaltet, die sich nach Passieren des Biprismas entweder nicht mehr oder doch mindestens innerhalb einer noch so kleinen Zone nicht vereinigen oder sich nach Passieren der Symmetriekante vollständig kreuzen.

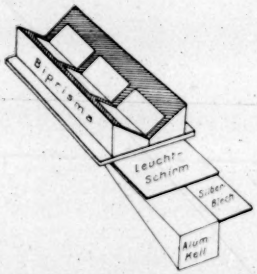
Aus den Figuren, insbesondere Fig. 1, 3, 4, 6, ist ersichtlich, daß die fluoreszierenden Felder f_1 und f_2 erheblich größer sein können als die zum Auge gelangenden Strahlenbündel und beliebig weit voneinander getrennt liegen können. Man kann sie daher samt den zugehörigen absorbierenden Körpern so groß wählen, daß die Schattenränder der absorbierenden Körper auf f_1 und f_2 auch bei sehr schief auffallenden Röntgenstrahlen nicht im Gesichtsfelde erscheinen. Es ist also nicht nötig, einen mit Biprismenoptik ausgestatteten Härtemesser in einer ganz bestimmten Neigung zu dem einfallenden Röntgenbündel zu halten, wie es bei den bisher bekannten gewöhnlichen Härtemessern mit angrenzenden Vergleichsfeldern unbedingt notwendig ist. Dieser Vorzug ist neben der vollkommenen Randschärfe praktisch der wichtigste.

Der Vorteil der Biprismenoptik etwa gegenüber der Verwendung des Lummer-Brodhunschen Photometerwürfels ist erstens der, daß sämtliche Biprismen geradsichtig sind, was für die Bequemlichkeit der Handhabung des Härtemessers und die Sicherheit des Beobachters vor Bestrahlung wesentlich ist. Der Lummer-Brodhunsche Würfel hat dagegen prinzipiell einen unsymmetrischen Strahlengang. Zweitens kann ein Biprisma ohne Linsenoptik leicht und billig für mehrere nebeneinanderliegende ausgedehnte Vergleichsfelder benutzt werden, wodurch die Vergleichsgenauigkeit steigt. Drittens

können sie leicht und billig in Gruppen kombiniert werden, wie z. B. in Fig. 5 und 11.

Die zweckmäßigste und einfachste Ausführungsform eines Härtemessers ist mit den Prismen der Fig. 1 möglich. Es wurden mehrere Modifikationen mittels dieser Prismen ausgeführt, von denen sich die in Fig. 10 dargestellte am besten bewährt hat. Der besseren Erkennbarkeit halber ist dort die vordere Hälfte des Biprismas abgeschnitten und vom Leuchtschirm auch ein Stück.

Fig. 10.



Das für 10 Wehnelt-Einheiten etwa 15 cm lang zu wählende Biprisma ist aus zwei großen Prismen zusammengesetzt, die an den zusammenstoßenden brechenden Kanten abgeschliffen und ohne notwendige Politur dieser Schlifflächen gemeinsam auf ein Stück gut ebenen photographischen Trockenplattenglases mit Kanadabalsam aufgekittet sind. Auf die oberen Prismenflächen ist eine schwarze Papiermaske (schraffiert gezeichnet) mit ebensoviel oder doppelt soviel kreisrunden oder quadratischen Ausschnitten geklebt, als der Aluminiumkeil ganze Einheiten zu messen gestattet. (Es sind nur drei Ausschnitte gezeichnet.) Die Symmetriekante des Biprismas bildet die Durchmesser bzw. Mittellinien der Ausschnitte. Neben jedem Ausschnitt ist die zugehörige ganze oder halbe Härtenummer ausgestochen oder eine käufliche Kupferschablone aufgeklebt.

Der Aluminiumkeil für die Wehnelthärtegrade 4—13 hat die Stufendicken 1,95; 2,4; 2,85; 3,35; 3,9; 4,55; 5,25; 6,0; 6,9; 7,9 mm[1]) bei 0,09 mm Dicke des (reinen!) Silberbleches (von Heraeus-Hanau). Die käuflichen Kryptoradiometer, die als die genauesten derartige Instrumente gelten können, besitzen diese Dickenmaße.

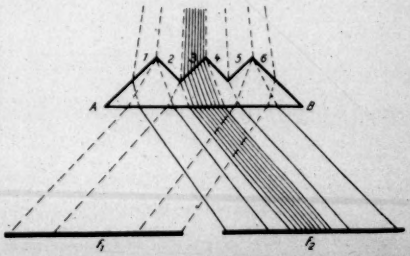
Um den durch den Aluminiumkeil bedingten Halbschatten bei schiefem Einfall der Strahlen gegen die Symmetrieebene (innere Seitenfläche des Keils) auch bei sehr schiefer Haltung des Instruments unsichtbar zu machen, muß der Leuchtschirm in etwa 5—10 mm Abstand unterhalb der Glasplatte sitzen je nach der Stärke der Brechung durch die Prismen und unmittelbar auf dem Blech und Keil aufliegen.

Die Unterteilung der an sich kontinuierlichen Skala durch die Papierausschnitte erweist sich als sehr vorteilhaft, wenn man nicht nach dem Gleichheitsprinzip allein, sondern auch nach dem Kontrastprinzip abliest, indem man diejenigen beiden Felder rechts und links vom gesuchten ins Auge faßt, auf denen soeben mit Sicherheit Halbschattenungleichheit (Kontrast) zu erkennen ist, und aus den Härtezahlen beider den Mittelwert nimmt. Für diese Art der Ablesung ist es besser, wenn der Keil aus planparallelen Stufen von obiger Dickenabstufung zusammengesetzt ist, damit die über dem *Al* liegenden Halbfelder jedes für sich gleichmäßig hell sind. Die Papierrippen zwischen den Feldern sind vorteilhaft nur etwa 2 mm breit.

Notwendig für den guten Überblick über mehrere Felder ist es, daß der Augenabstand nicht unter 25 cm beträgt. Gleichzeitig ist diese Entfernung aber auch geboten, um die Parallaxe der auf die Papiermaske akkommodierten Augen gegen den Leuchtschirm zu vermindern. Aus demselben Grunde ist es vorteilhaft, einen brechenden Winkel von nicht unter 45° bei gewöhnlichem Glase zu verwenden, damit der Leuchtschirm möglichst dicht, womöglich unmittelbar an der Glasplatte anliegen kann. Bei Verwendung der Prismengruppe (Fig. 6—9) ist die binokulare Parallachse zu vermeiden. Sie eignen sich daher nur für einäugige Betrachtung, am besten mit auf die Maske eingestellter Lupe. Auch bei den anderen Formen ist Betrachtung mit Lupe von Vorteil, z. B. für das Kryptoradiometer.

Eine besondere Ausführungsform für letzteres, die eine Kombination von Fig. 1 und 6 darstellt, ist in Fig. 11 wiedergegeben. Es sind

Fig. 11.



1) B. Walter, Ann. d. Phys. 17, 562, 1905.

dort im ganzen 6 vielleicht 2 mm breite und 10 mm lange wirksame Prismenflächen vorhanden (numeriert), von denen Nr. 1, 3, 5 die Leuchtschirmhälfte f_2 erscheinen lassen, Nr. 2, 4, 6 die andere Hälfte f_1. Die Empfindlichkeit des Auges für diese Streifung der beobachteten Gesamtprismenfläche ist so groß, daß selbst die besten Leuchtschirme nicht gleichmäßig genug gegossen sind, um die Genauigkeit des Photometers auszunutzen[1]). Die Körnung der Schirme wird durch die notwendige Betrachtung mit einer auf die Prismenfläche eingestellten Lupe genügend beseitigt. Für rein optische Gleichheitsphotometer dürfte es aber sehr gut brauchbar sein, sowie auch sämtliche obigen, soweit sie nicht schon dafür verwendet werden.

Der Firma Reiniger, Gebbert und Schall A.-G. in Erlangen, die mir für die beschriebenen Versuche in entgegenkommendster Weise ihre Hilfsmittel zur Verfügung stellte, spreche ich auch hier meinen verbindlichsten Dank aus. Sie wird den Vertrieb eines der obigen Modelle voraussichtlich bald übernehmen.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 13. November 1916.)

1) Die neuen Ossal-Schirme der Heyden A.-G. in Dresden-Radebeul konnten noch nicht probiert werden.

BESPRECHUNGEN.

F. Auerbach, Die Physik im Kriege. Eine allgemein verständliche Darstellung der Grundlagen moderner Kriegstechnik. 8°. 3. vermehrte u. verbesserte Aufl. VIII u. 229 S., m. 126 Abbildungen im Text. Jena, Gustav Fischer. 1916. M. 3.60, geb. M. 4.50.

Das Buch erschien in erster Auflage zu Ostern 1915[1]), und nach wenig mehr als einem Jahre wurde bereits die dritte Auflage notwendig, das beste Zeichen dafür, ein wie weitgehendes Interesse ihm entgegengebracht wurde. Ein physikalisches Lehrbuch ist es nicht und soll es auch nicht sein; in erster Linie kommt es wohl dem Bedürfnis des gebildeten und nachdenkenden Laien entgegen, sich über die wissenschaftlichen Grundlagen der Kriegstechnik zu unterrichten. Aber auch für den Physiker ist die Lektüre des Buches nicht ohne Interesse und Nutzen. Wird ihm auch vieles von dem, was er hier findet, bereits bekannt sein, so wird er doch einerseits die gedrängte Form, in der ihm über das Wissenswerte eine Übersicht geboten wird, schätzen und dann vor allen Dingen dazu angeregt werden, sich über einzelne Fragen, die ihn besonders interessieren, aus einschlägigen Fachwerken eingehender zu unterrichten.

V. Pieck.

1) Besprechung s. diese Zeitschr. 16, 266, 1915.

Preisausschreiben.

Die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Frankfurt a. M. stellt aus den Mitteln der Emil Cohnstaedt-Stiftung folgende Preisaufgabe: „Es wird allgemein angenommen, daß an der Oberfläche fester Körper eine Gashaut haftet. Die Naturwissenschaftliche Fakultät verlangt eine Experimentaluntersuchung über die Art und Dicke dieser Haut, insbesondere an Metallplatten."

Der ausgesetzte Preis beträgt eintausend Mark. Die Bewerbungsschriften sind bis zum 30. Juni 1918 bei der Dekanatskanzlei der Universität einzuliefern. Die Fakultät ist nicht verpflichtet, Arbeiten nachzuprüfen, die nicht in einem Institut der Universität Frankfurt entstanden sind. Interessenten erhalten auf Wunsch die näheren Bestimmungen von der Dekanatskanzlei zugesandt.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Emil Everling für Mechanik des Frei- und Luftballons und der Luftfahrtinstrumente, Untersuchungen an und in Luftfahrzeugen, an der Technischen Hochschule Zürich Dr. W. D. Treadwell für Physikalische Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Robert Moser für Theorie und Konstruktion elektrischer Maschinen, an der Technisch. Hochschule Zürich Dr. J. Bretano für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Straßburg Dr. Jacob Parnas zum Professor für Physiologische Chemie an der Universität Warschau, der Privatdozent an der Bergakademie in Freiberg Dr. Paul Ludewig zum a. o. Professor der Physik und Vorstand des Radiuminstituts daselbst, der a. o. Professor der Physik an der Universität Erlangen Dr. Josef Würschmidt zum Abteilungsvorsteher am Geographischen Institut und an der Zentralanstalt für Wetterkunde der Universität Konstantinopel, der Professor der Erdkunde an der Universität Konstantinopel Dr. Erich Obst zum Direktor des meteorologisch-klimatischen Dienstes in der Türkei.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor für Technische Chemie und chemische Technologie an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich Dr. M. Cérésole.

Auszeichnungen: Die Royal Society in London verlieh die Copley-Medaille Sir James Dewar, die Davy-Medaille Professor Henri Louis Le Chatelier.

Gestorben: Der ord. Professor der organischen Chemie an der Technischen Hochschule München Dr. Andreas Lipp, der Erfinder eines Schnellfeuergeschützes Sir Hiram Maxim in London, der Lehrer für Chemie an der Höheren Kriegsschule im Haag Dr. Willem Stortenbeker, der emer. ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Dresden Geheimer Rat Dr. Walther Hempel, der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität Glasgow John Ferguson, Fräulein Dr. Laura Hezner, Privatdozentin für chemische Mineralogie und Petrologie an der Technischen Hochschule Zürich.

Angebote.

Das **Militärversuchsamt (Berlin — Postamt Plötzensee)** sucht zum möglichst baldigen Diensteintritt

1 Laboratoriumsingenieur od. techn. Physiker,

1 Hütteningenieur.

Verlangt wird abgeschlossene Hochschulbildung (Diplom-Examen bzw. Dr. phil.) und für den Hütteningenieur Kenntnisse in der Metallographie. In Betracht kommen nur **nicht** kriegsverwendungsfähige Herren.

Die Einstellung geschieht unter Beleihung auf Widerruf mit der Stelle eines oberen Militärbeamten mit Offiziersrang.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.